5卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.2
1988年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1988

一类随机逼近问题的最优迭代次数分配*

朱允民

(中国科学院成都分院数理科学研究室)

摘　　要

本文考虑一类各分量相对独立的多维随机逼近问题．从最小渐近方差的要求出发，分析出各分量最优迭代次数分配比例，并给出实现这种迭代次数分配的策略及策略参数的适应性的递推估计公式．

一、引　　言

当人们仅能带随机误差地量测未知非线性函数，而欲求该函数的零点或极值时，通常利用 Robbins－Monro(RM)或Kiefer－Wolfowitz (KW)随机逼近型算法[1,2]．这些年来，无论对回归函数，还是对量测噪声，人们为减弱它们所要求的收敛性条件都取得了显著的进展[3,4,5,6]．但是由于回归函数的未知性加上量测噪声，使改善随机逼近算法收敛性质显得困难．本文对一类各分量相对独立的多维随机逼近问题，从寻求最小渐近方差出发，分析出依赖于各分量回归函数在零点的一阶导数及噪声方差的最优迭代次数分配比例，并给出实现这种比例的迭代次数分配策略，及策略参数的适应性递推估计公式．

二、问题的模型及最优迭代次数分配比例

我们所考虑的回归函数为

$$f(x)=(f_1(x^1),f_2(x^2),\cdots,f_r(x^r))'\in R^r,$$
$$x=(x^1,x^2,\cdots,x^r)'\in R^r. \tag{1}$$

这样类型的 $f(x)$ 求零点 $\theta=(\theta^1,\theta^2,\cdots,\theta^r)'$ 问题还可来源于一个下面形式的二次函数 $g(x)$ 求极值问题．

$$g(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}g_i^2(x^i), \tag{2}$$

其中 $g_i(\cdot)$，$i=1,\cdots,r$，是 $R^1\longrightarrow R^1$ 的函数．

我们不知道(1)中各个函数 $f_i(\cdot)i=1,\cdots,r$ 的形式，但可以带量测噪声地观察

* 中国科学院科学基金资助的课题．

本文于1987年3月30日收到．1988年1月11日收到修改稿．

$$y_i(x_n^i)=f_i(x_n^i)+\varepsilon_n^i,\quad i=1,\cdots,r, \tag{3}$$

其中x_n^i表示对 $f_i(\cdot)$的零点 θ^i 的第 n 次估计．ε_n^i表第 n 次量测噪声．

为求 $f(\cdot)$的根 θ，如果采用各分量具有相等迭代次数的通常 RM 算法，有下面递推公式

$$x_{n+1}^i=x_n^i-\frac{1}{na_i}y_i(x_n^i),\quad i=1,2,\cdots,r, \tag{4}$$

这里 a_i 为某固定常数，还可写成向量形式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{n}Ay(x_n), \tag{5}$$

这里 A 为一对角阵

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & 0 \\ & \frac{1}{a_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_r}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$y(x_n)=(y_1(x_n^1),y_2(x_n^2),\cdots,y_r(x_n^r))'. \tag{7}$$

我们已经知道（参见〔7〕147－159页），在一组适当的条件下

$$\sqrt{n}(x_n-\theta)\sim N(0,S),\quad n\to\infty, \tag{8}$$

其中 $S=\begin{pmatrix}s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & s_r\end{pmatrix}$ $s_i=\dfrac{\sigma_i^2}{a_i(2c_i-a_i)},\quad i=1,2,\cdots,r,$ (9)

或者

$$nE\|x_n-\theta\|^2=n\sum_{i=1}^{r}E(x_n^i-\theta^i)^2$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma_i^2}{a_i(2c_i-a_i)}=\mathrm{trace}S, \tag{9}$$

其中 $c_i=f_{x^i}(\theta)=f_i'(\theta^i)$，不妨假设 $c_i>\frac{1}{2}a_i>0$，

$$\sigma_i^2=\lim_n E\varepsilon_n^{i\,2}. \tag{10}$$

已经知道，当取$a_i=c$，在（9）中我们获得最小极限，也即（8）中方差阵的最小迹

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma_i^2}{c_i^2}. \tag{11}$$

这是在上面的各分量相等迭代次数的RM算法所能得到的最优值。

现在的问题是用什么办法使算法具有更优的渐近方差阵的迹。

为了回答这个问题，我们作如下分析：

假设到时刻n，各个分量总共已作了nr次迭代。第i个分量作了n_i次迭代，n_i不一定相等，但$\frac{n_i}{nr}\xrightarrow[n\to\infty]{}p_i$，同时$n_i\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$，

$$\lim_n nE\|x_n-\theta\|^2=\lim_n n\sum_{i=1}^{r}E\,(x_{n_i}-\theta^i)^2=\lim_n\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{nr}{n_i}n\,E(x_{n_i}-\theta^i)$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}\frac{\sigma_i^2}{c_i^2}. \tag{12}$$

于是进一步的问题是p_i应取什么值，能使

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}\frac{\sigma_i^2}{c_i^2}=\min_{\{p_i\}},\quad \sum_{i=1}^{r}p_i=1\ , \tag{13}$$

这是一个条件极值问题，通过lagrange乘子法容易算得

$$p_i=\frac{\dfrac{\sigma_i}{c_i}}{\sum_{i=1}^{r}\dfrac{\sigma_i}{c_i}}. \tag{14}$$

这时（13）中的最小值是

$$\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma_i}{c_i}\right)^2. \tag{15}$$

从熟知的不等式

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ (a_i\geqslant 0)$$

可见，我们上面算出的最小值也有

$$\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma_i}{c_i}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\sigma_i}{c_i}\right)^2. \tag{16}$$

以上分析说明，只要我们使各个分量上迭代次数的分配比例渐近地如（14），我们确实可以得到较（11）中更优的渐近方差阵的迹。也就是说，确实存在着最优的迭代次数分配比例。

三、最优迭代次数分配策略及定理

如果我们确切地知道最优的 p，实现最优迭代次数分配比例是平凡的。然而我们通常并不知道回归函数 $f_i(x^i)$在$x^i=\theta^i$ 的一阶导数，也不知道噪声 ε_n^i的方差，更不知道方差序列的极限，但我们还是有办法实现这种最优迭代次数分配比例。

如果我们每次仅能在 r 个分量中选择一个分量量测回归函数及迭代，同时利用新得到的观察值作一次这一分量的 c_i 和 σ_i 的估计，我们提出下面的选择分量策略：

假设当前我们已作过 n 次选择，我们将选择 i 分量作为下一次的迭代分量，它使得

$$\frac{\sigma_{n_i}^i\Big/c_{n_i}^i}{\sum\limits_{j=1}^{r}\left(\sigma_{n_j}^j\Big/c_{n_j}^j\right)}-\frac{n_i}{n}=\max\left\{\frac{\sigma_{n_k}^k}{c_{n_k}^k}\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_{n_j}^j}{c_{n_j}^j}\right)-\frac{n_k}{n};\ k=1,\cdots,r\right\} \tag{17}$$

这里 n_j 是当前在 j 分量上已作过的迭代次数，$c_{n_j}^j$，$\sigma_{n_j}^j$ 分别是c_j，σ_j 的第n_j 次估计。当出现多个分量满足（17）时，我们选择分量序号最小的。

为了说明这种策略能满足我们的需要，我们有

定理 1　如果下列条件成立

$$c_{n_i}^i>0,\ c_{n_i}^i\xrightarrow[n_i\to\infty]{}c_i,\qquad a.s. \tag{18}$$

$$\sigma_{n_i}^i>0,\ \sigma_{n_i}^i\xrightarrow[n_i\to\infty]{}\sigma_i,\qquad a.s. \tag{19}$$

则按照（17）所定义的迭代分量选择策略，我们有

1）　$$n_i\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,\ \forall\ i=1,2,\cdots,r, \tag{20}$$

2）　$$\frac{n_i}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}p_i,\ a.s.\ \forall\ i=1,2,\cdots,r. \tag{21}$$

说明 1　结论2）并不一定包含1），因为当 σ_k 取特殊值0，则$p_k=0$，这时结论 1）不成立仍有结论2）成立。而1）若不成立，$x_{n_k}^k\not\longrightarrow\theta^k$，这样的分配策略当然是不可取的。

为了使定理的证明表达得清楚，我们先给出下列引理。

引理 1　在定理的条件下，结论1）成立。

证　若引理不成立，则存在某个N，当$n>N$，

$$n_{k_1}=N_{k_1},n_{k_2}=N_{k_2},\cdots,n_{k_l}=N_{k_l},\quad l<r, \tag{22}$$

这里$k_1,\cdots,k_l$表r个分量中的某l个序号。其余$r-l$个分量，$n_i \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$，$i\neq k_j$，$j=1,\cdots,l$。

于是由已知条件

$$\frac{\sigma_{n_{k_1}}^{k_1}\Big/c_{n_{k_1}}^{k_1}}{\sum\limits_{j=1}^{r}(\sigma_{n_j}^{j}\Big/c_{n_j}^{j})}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\sigma_{N_{k_1}}^{k_1}\Big/c_{Nk_1}^{k_1}}{\sum\limits_{j\neq k_1,\cdots,k_l}^{r}(\sigma_j/c_j)+\sum\limits_{i=1}^{l}(\sigma_{N_{k_i}}^{k_i}\Big/c_{N_{k_i}}^{k_i})}>0, \tag{23}$$

$$\frac{n_{k_1}}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0。 \tag{24}$$

因而由选择策略的定义，应有

$$\max\left\{\frac{\sigma_{n_i}^{i}}{c_{n_i}^{i}}\Big/\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_{n_j}^{j}}{c_{n_j}^{j}}\right)-\frac{n_i}{n}:\ i=1,2,\cdots,r\right\}>\delta>0,\quad \forall n\geqslant N_1, \tag{25}$$

为书写方便，我们记

$$p_{n_i}=\frac{\sigma_{n_i}^{i}}{c_{n_i}^{i}}\Big/\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_{n_j}^{j}}{c_{n_j}^{j}}\right),\quad i=1,2,\cdots,r,\forall n \tag{26}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{r}\left(p_{n_i}-\frac{n_i}{n}\right)=0,\quad \forall n \tag{27}$$

由（25）（27），可以看出，至多对某一个固定的分量j，存在一个n的子序列$n(m)$，满足

$$p_{n(m)_j}-\frac{n(m)_j}{n}<-\frac{\delta}{r},\quad \forall m\geqslant N_2 \tag{28}$$

显然，当

$$p_{n_j}-\frac{n_j}{n}<0,$$

分量j不可能被选中作迭代，这时$\frac{n_j}{n}$随n增加严格递减，$p_{n_j}-\frac{n_j}{n}$的总趋势是由负

向正。

另一方面，根据引理的条件及决策策略的定义，我们有

$$p_{(n+1)_j}-\frac{(n+1)_j}{n+1}-\left(p_{n_j}-\frac{n_j}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \tag{29}$$

因此当 N_3 充分大，即使存在某 $n^*\geqslant N_3$ 使其分量 j 被选中迭代，这时至少

$$p_{n_j^*}-\frac{u_j^*}{n}>0. \tag{30}$$

由（29）（30）也不可能得出

$$p_{(n^*+1)_j}-\frac{(n^*+1)_j}{n^*+1}=p_{n_j^*+1}-\frac{n_j^*+1}{n^*+1}<-\frac{\delta}{2r}. \tag{31}$$

所以从（28）式以后的如上分析又说明当 $n(m)>n^*$ 满足（28）的子序列是不可能存在的，由矛盾使引理成立。

引理 2　在定理的条件下，

$$\max_i\left(p_{n_i}-\frac{n_i}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ a.s. \tag{32}$$

证　首先我们断定

$$\max_i\left(p_{n_i}-\frac{n_i}{n}\right)\geqslant 0,\ \forall n \tag{33}$$

否则将与（27）式矛盾。

其次，若引理不成立，则存在一个 n 的子序列 $n(m)$，使得

$$\max_i\left(p_{n(m)_i}-\frac{n(m)_i}{n(m)}\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}2\delta>0, \tag{34}$$

因而对某 N，

$$\max_i\left(p_{n(m)_i}-\frac{n(m)_i}{n(m)}\right)>\delta,\ 只要\ m\geqslant N. \tag{35}$$

于是类似引理1中（27）（28）的推理，对某固定的分量 j，存在一个 $n(m)$ 的子序列，为书写简单仍记为 $n(m)$，满足

$$p_{n(m)_j}-\frac{n(m)_j}{n}<-\frac{\delta}{r}. \tag{36}$$

到此，只要照搬引理1（28）以后的推理，即可引出矛盾，故（32）成立。

引理 3　在定理的条件下，

$$\min_i\left(p_{n_i}-\frac{n_i}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ a.s. \tag{37}$$

证 显然

$$\min_i \left(p_{n_i} - \frac{n_i}{n} \right) \leqslant 0, \ \forall n. \tag{38}$$

同时由（27）

$$\min_i \left(p_{n_i} - \frac{n_i}{n} \right) \geqslant -(r-1) \max_i \left(p_{n_i} - \frac{n_i}{n} \right). \tag{39}$$

于是由（38）（39）及引理2，（37）成立。

有了以上三个引理，定理1的证明是显而易见的，故不需再证了。

四、参数c_i和σ_i的估计

定理1虽然明确地回答了实现各分量最优迭代次数分配比例的选择策略的理论依据，但还没有解决如何构造满足定理1条件的估计序列$\{c^i_{n_i}\}$和$\{\sigma^i_{n_i}\}$。

我们首先讨论已知σ_i的某些先验信息以至不需估计它的简单情况，例如我们若知道σ_i之间的比值关系，则可在（14）中将σ_i消去。

由于我们是在算法（4）中假设$a_i=c_i$得到（11）中最小值的基础上，分析出各分量的最优迭代次数分配比例的，而实际上我们并不知道c_i，所以我们只得利用观察值估计c_i，并利用估计值构造一种适应性RM算法，使其当$n\to\infty$，这种算法渐近地等价于具有$a_i=c_i$的算法（4）。当然，选择策略（17）中所需要的$c^i_{n_i}$也就同时得到了。

幸运的是，在〔8〕中，已经提出了满足上面要求的适应性算法，现叙述如下：

设

$$z^i_n = (y^i_n(x^i_n+\alpha_n) - y^i_n(x^i_n-\alpha_n))/2\alpha_n, \tag{40}$$

$$c^i_n = \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z^i_y \right]_{r_1, r_2}, \tag{41}$$

其中

$$[z]_{r_1,r_2} = \begin{cases} z, & r_1 \leqslant z \leqslant r_2 \\ r_1, & z < r_1, \quad 0 < r_1 < c_i < r_2 < \infty \\ r_2, & z > r_2 \end{cases} \tag{42}$$

$\{\alpha_n\}$是某确定性序列，区间$[r_1, r_2]$是预先知道的c_i可能的取值范围。

这里所用的RM算法是

$$x^i_{n+1} = x^i_n - \frac{1}{nc^i_n} \left[\frac{y^i_n(x^i_n+\alpha_n) + y^i_n(x^i_n-\alpha_n)}{2} \right]. \tag{43}$$

从（40）～（43）就构成了所需的适应性算法。

利用〔8〕中的思想，可以得到下面的定理。

定理 2　假设下列条件成立：

1）对任 $x^i\in R^1$，存在某常数 K，$f_i^2(x^i)+\mathrm{E}\ \varepsilon_n^{i^2}(x^i)\leqslant K(1+x^{i^2})$，$\forall n$；

2）$f_i(x^i)=c_i(x^i-\theta^i)+0(x^i-\theta^i)$，且 $f(\cdot)$ 二次连续可微；

3）对某 δ：$\frac{1}{4}<\delta<\frac{1}{2}$，$K_1>0$，$K_2>0$，$\frac{K_1}{n^\delta}<\alpha_n<\frac{K_2}{n^\delta}$；

4）对任 $x^i\in R^1$ 且 $x^i\neq\theta^i$，$f(x^i)(x^i-\theta^i)>0$；

5）$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ x_n^i\to\theta^i}}\mathrm{E}\ \varepsilon_n^{i^2}(x_n^i)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\sigma}_n^{i^2}=\sigma_i^2$，

$$\mathrm{E}\,(\varepsilon_n^i(x_n^i)\,|\,\varepsilon_m^i(x_m^i))=0,\quad\forall n>m,\quad\forall i;$$

6）对某 $\delta>0$，

$$\lim_{R\to\infty}\ \sup_{|x^i-0^i|<\delta}\ \sup_{n\geqslant1}\int_{|\varepsilon_n^2(x)|<R}\varepsilon_n^{i^2}(x)p(\mathrm{d}w)=0,$$

则从（40）—（43）所定义的算法对任初条件 $c_0^i>0$，x_0^i 有下列渐近性质

$$x_n^i\longrightarrow\theta^i,\quad n\to\infty,\quad a.e.,\tag{44}$$

$$\sqrt{n}\,(x_n^i-\theta^i)\sim N\left(0,\frac{\sigma_i^2}{2c_i^2}\right),\quad n\to\infty,\tag{45}$$

$$c_n^i\longrightarrow c,\quad n\to\infty,\quad a.e..\tag{46}$$

〔7〕中已解释（45）中方差缩小一倍是因为算法增加了一倍观察量（见(40)(43)）。

在〔6〕中已经发展了一种具有变界截尾的随机逼近算法，利用它我们可以构造新的适应性 RM 算法，而显著地减弱对回归函数线性增长速度限制的条件。下面我们将叙述这种算法。

取一个严格上升趋于无穷的正实数序列 $\{M_n\}$，我们递推地定义一个非负整数值随机序列 $\sigma(n)$ 和逼近 x_n 如下：

$$\sigma(n)=\sum_{j=0}^{n-1}I_{\left[\,|x_j-\frac{1}{ja}y_j|>M_{\sigma(j)}\right]},\quad\sigma(0)=0,\tag{47}$$

$$x_{n+1}=\left(x_n-\frac{1}{na}y_n\right)I_{\left[\,|x_n-\frac{1}{na}y_n|\leqslant M_{\sigma(n)}\right]}+x^*I_{\left[\,|x_n-\frac{1}{na}y_n|>M_{\sigma(n)}\right]}\tag{48}$$

其中　$y_n=f(x_n)+\varepsilon_n$，x^*为小于M_1的一确定点。

在〔6〕〔9〕中，这种修改后的SA算法，在不要求回归函数$f(\cdot)$的增长速度限制和零点先验信息的条件下，作者证明了算法的强一致性、收敛速度和渐近正态性。为利用这种算法的优点，我们构造新的适应性RM算法如下：

在（48）中，我们作下列改写：

$$y_n=\frac{y_n^i(x_n^i+\alpha_n)+y_n^i(x_n^i-\alpha_n)}{2},$$

$$na=nc_n^i,$$

$$c_{n+1}^i=\left[\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}z_j^i\right]_{r_1,r_2}\quad（如(41)),\tag{49}$$

其中　z_n^i定义如（40）。

现在我们有

定理 2′　除了定理2中的条件1）被删去，条件4）改为更宽的下列条件：

存在一二次可微函数$v(x)$，使其

$$v(x^i)\neq0,\ x^i\neq\theta^i,\ v(x^i)\to\infty,\ 当x^i\to\infty,\ f_i(x^i)v_x(x^i)>0,\ x^i\neq\theta^i,$$

其余保留定理2的条件2）、3）、5）、6），则定理2的结论仍成立。

为节省篇幅，加上只要参见〔6〕〔9〕及〔7，第7章5，6节〕，证明定理2′的基本思路和方法都可以得到，故此处不予证明。

综上可见，当不需要估计σ_i时，具有最优迭代次数分配的适应性RM算法与通常适应性算法相比，基本上不增加计算量和观测量。

现在剩下的问题是当σ_i必须估计应怎么办。

为了获得满足定理1条件的估计序列σ_n^i,我们需要有关噪声ε_n^i及回归函数$f^i(\cdot)$的进一步信息。

条件A1　设$\{F_n\}$是递增的子σ—代数，当x是F_{n-1}可测的，$\varepsilon_n^i(x)$是F_n可测的，且

$$E(\varepsilon_n^i(x)\,|\,F_{n-1})=0,\tag{50}$$

$$E(\varepsilon_n^{i\,2}(x)\,|\,F_{n-1})=\hat{\sigma}_n^{i\,2}\leqslant K,\quad \hat{\sigma}_n^{i\,2}\xrightarrow[n]{}\sigma_i^2,\ \forall i,\tag{51}$$

$$E\varepsilon_n^{i^4} \leqslant r_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} r_n^2 < \infty, \quad \forall i. \tag{52}$$

条件$A2$ 设$f^i(\cdot)$是lipschitz连续的，或者二阶导数有界，此外

$$f^{i^2}(x^i) \leqslant K(1 + x^{i^2}), (x^i - \theta^i) f^i(x^i) > 0, \quad x^i \neq \theta^i, \quad \forall i. \tag{53}$$

为了书写方便，我们改记

$$\widetilde{f}(x_n^i) = (f_i(x_n^i + \alpha_n) + f_i(x_n^i - \alpha_n))/2,$$

$$\widetilde{y}_n^i = \widetilde{f}_n(x_n^i) + \varepsilon_n^i(x_n^i), \tag{54}$$

这里$\varepsilon_n^i(x_n^i)$仍满足条件A，由x_n^i是F_{n-1}可测知ε_n^i是F_n可测的。

利用观测值，我们给出σ^{i^2}的递推估计公式如下：

$$\sigma_n^{i^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{y}_k^{i^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma_{n-1}^{i^2} + \frac{1}{n} \widetilde{y}_n^{i^2}. \tag{55}$$

显然，只需取初值$\widetilde{y}_0^{i^2} > 0$，就有$\sigma_n^{i^2} > 0$，$\forall n$，这就保证了定理1中要求$\sigma_n^{i^2}$大于0的条件。

为说明这样构造的估计序列σ_n^i还满足定理1中的强收敛条件，我们要如下引理。

引理 4 设正项序列$\{a_n\}\{b_n\}\{c_n\}$满足如下不等式

$a_{n+1} \leqslant (1 + b_n) a_n + c_n$，$p > 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$，则存在数$M$，使

$$a_n \leqslant M.$$

证 由已知

$$a_{n+1} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + b_k) a_1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{n} (1 + b_j) \right) c_k.$$

由于 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + b_k) = N < \infty$，所以

$$a_{n+1} \leqslant N a_1 + N \sum_{k=1}^{\infty} c_k = M < \infty.$$

引理 5 在条件$A1$、$A2$之下，由(40)～(43)和(47)～(49)所定义的算法有$E(x_n^i - \theta^i)^2$和$E(x_n^i - \theta^i)^4$一致有界，$\forall i$。

证 不妨设$\theta^i = 0$。由条件$A2$知

$$-x_n^i \widetilde{f}_i(x_n^i) = -x_n^i f_i(x_n^i) - \frac{1}{2} x_n^i (f_i(x_n^i + \alpha_n) - f_i(x_n^i) -$$

$$-f_{\cdot}(x_n^i)+f_{\cdot}(x_n^i-\alpha_n))$$

$$\leqslant L\alpha_n|x_n^i| \qquad (\text{不妨设}\alpha_n<1)。\tag{56}$$

注意到对本引理所讨论的两种算法都有

$$|x_{n+1}^i|\leqslant|x_n^i-\frac{1}{nc_n^i}(\widetilde{f}_i(x_n^i)+\varepsilon_n^i)|。\tag{57}$$

由（56）（57）

$$x_{n+1}^{i^2}\leqslant x_n^{i^2}+\frac{2}{nr_1}L\alpha_n(x_n^{i^2}+1)+\frac{K_1}{n^2r_1^2}(1+x_n^{i^2})+\frac{1}{n^2r_1^2}\varepsilon_n^{i^2}$$

$$+\frac{2}{nr_1}x_n^i\varepsilon_n^i+\frac{2}{nr_1}f_{\cdot}(x_n^i)\varepsilon_n^i。\tag{58}$$

由条件$A1$和x_n^i是F_{n-1}可测，

$$Ex_{n+1}^{i^2}\leqslant Ex_n^{i^2}+\left(K_2\frac{\alpha_n}{nr_1}+K_3\frac{1}{n^2r_1^2}\right)Ex_n^{i^2}+\frac{K_3}{n^2r_1^2}+\frac{K_4}{nr_1}\alpha_n。\tag{59}$$

由定理2条件中对α_n的要求，显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha_n<\infty。\tag{60}$$

由（59）（60）及引理4知引理5的前一结论成立。

从（58）出发，用如上推理，同样可得引理5的第二结论也成立。

现在我们有

定理 3　在定理2′和条件组A下，由（54）～（55）所定义的$\sigma_n^{i^2}$有

$$\sigma_n^{i^2}\xrightarrow[n]{}\sigma_i^2,\ a.s.$$

证　在（55）两边都减去$\hat{\sigma}_n^{i^2}$

$$\sigma_n^{i^2}-\hat{\sigma}_n^{i^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)(\sigma_{n-1}^{i^2}-\hat{\sigma}_{n-1}^{i^2})+\frac{1}{n}\widetilde{f}_i^{\,2}(x_n^i)+\frac{2}{n}\widetilde{f}_{\cdot}(x_n^i)\varepsilon_n^i$$

$$+\frac{1}{n}(\varepsilon_n^{i^2}-\hat{\sigma}_n^{i^2})-\frac{n-1}{n}(\hat{\sigma}_n^{i^2}-\hat{\sigma}_{n-1}^{i^2})。\tag{61}$$

由定理2′

$$\tilde{f}_i(x_n^i) \underset{n}{\to} 0, \quad a.s. \tag{62}$$

所以(61)右边第2项是$o\left(\frac{1}{n}\right)$阶。

对(61)右边第3项，由条件A和x_n^i是F_{n-1}可测的，

$$E(\tilde{f}_i(x_n^i)\varepsilon_n^i | F_{n-1}) = 0. \tag{63}$$

再由引理5和$A2$一致于n

$$E\tilde{f}_i^4(x_n^i) \leqslant EK_5^2(1+x_n^{i^2})^2 \leqslant K_6(Ex_n^{i^4}+1) < M, \tag{64}$$

因而从条件$A1$及(63)，(64)，

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tilde{f}_i(x_n^i)\varepsilon_n^i\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E(\tilde{f}_i^2(x_n^i)\varepsilon_n^{i^2}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[E\tilde{f}_i^4(x_n^i) + E\varepsilon_n^{i^4}\right] < \infty. \tag{65}$$

所以$\frac{2}{n}\tilde{f}_i(x_n^i)\varepsilon_n^i$满足可求和条件。

仍由条件组A，用如上方法同样可证(61)右端第4项也满足可求和条件。而第5项可分写成两项

$$\frac{n-1}{n}(\hat{\sigma}_n^{i^2} - \hat{\sigma}_{n-1}^{i^2}) = (\hat{\sigma}_n^{i^2} - \hat{\sigma}_{n-1}^{i^2}) - \frac{1}{n}(\hat{\sigma}_n^{i^2} - \hat{\sigma}_{n-1}^{i^2}). \tag{66}$$

显然(66)前一项可求和，后一项是$o\left(\frac{1}{n}\right)$阶。

所以

$$\sigma_n^{i^2} - \hat{\sigma}_n^{i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad a.s. \tag{67}$$

也即

$$\sigma_n^{i^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^{i^2}, \quad a.s. \tag{68}$$

至此，我们已经完成了具有最优迭代次数分配比例的适应性RM算法的构造和理论证明。

最后，作者衷心感谢 Kushner 教授，因为本问题的提出得益于在美国布朗大学访问期间与他的多次讨论。

参 考 文 献

〔1〕 Robbins, H. and Monro, S., A Stochastic Approximation Method, Ann. Math. Statist., 22: 1, (1951), 400-407.

〔2〕 Kiefer, E. and Wolfowitz, J., Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function, Ann. Math. Statist., 23: 3, (1952), 464-466.

〔3〕 Ljung, L., Analysis of Recursive Stochastic Algorithms, IEEE Trans., AC-22, 4, (1977), 551-575.

〔4〕 Kushner, H. J. and Clark, D.S., Stochastic Approximation Method for Constrained and Unconstrained Systems, Springer, (1978).

〔5〕 陈翰馥，相关量测误差下的随机逼近，中国科学，A辑，3，(1983)，264-274.

〔6〕 陈翰馥、朱允民，变界截尾的随机逼近算法，中国科学，A辑，6,(1986),561-570.

〔7〕 Nevel'son, M. B. and Has'minskil, R. Z., Stochastic Approximation and Recursive Estimation, American Mathematical Society, (1976).

〔8〕 Venter, J. H., An Extension of the Robbins-Monro procedure, Ann. Math. Statist., 38, (1967), 181-190.

〔9〕 陈翰馥、朱允民，随机变界截尾逼近算法的渐近性质，数学物理学报，7:4，(1987)，431-441.

Optimal Allocations of Iteration Times of a Class of Stochastic Approximation Problem

Zhu Yunmin

(Institute of Mathematical Sciences,
Chengdu Branch, Academia Sinica)

Abstract

In this paper a class of stochastic approximation prolem with independent components was disscused. For achieving the minimal asymptotic covariance of approximation errors the optimal allocation ratio of iteration times was analyzed and determined out, a strategy for realizing this optimal ratio was proposed, and an adaptive recursive algorithm for the parameters in the strategy was developed.