第5卷 第2期
1988年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.5, No.2
June, 1988

预测控制系统的鲁棒性分析*

许晓鸣　席裕庚　张钟俊
（上海交通大学自动控制系）

摘　要

预测控制的强鲁棒性已在过程控制领域中引起了广泛的注意。本文在对鲁棒性作出定义后，用定量分析的方法说明：预测控制在出现模型失配时鲁棒性优于传统最优控制的主要原因，是由于它增加了对未知模型失配进行预测的功能。

一、引　言

从七十年代中期起，一类新型的高级过程控制算法—预测控制在工业中获得了成功的应用。这种成功首先应归功于预测控制的强鲁棒性。然而对于产生鲁棒性的机理，至今尚未从理论上得到分析。本文希望通过定量分析的方法，揭示预测控制鲁棒的原因。为此，首先给出鲁棒性的定义。

定义1.1　控制系统的鲁棒性，是指系统在其数学模型与实际过程出现失配时，使系统性能保持在允许范围内的能力。

按照上述定义，不同的控制性能（如稳定性，最优性等）都有自己相应的鲁棒性。尽管目前鲁棒控制器的设计方法很多，但所采用的基本思想，大多为将控制系统的性能指标设定在允许范围的不敏感区域或几何中心。这样当模型失配时，性能指标就不容易超出允许范围。从本质上说，这是以性能指标的衰减来换取鲁棒性的设计方法。

从定义1.1可知，模型失配是使系统性能指标发生漂移的主要原因。当然，实际系统中的模型失配是无法预知的，但是通过历史数据对其进行预测，就有可能获得模型失配的近似信息。从最优控制理论[2]可知，当性能指标最优时，它一定落在允许范围内。预测控制的有限时域滚动优化技术，保证了预测值具有一定的精度，从而使控制系统的性能指标落在最优点的附近，达到了改善鲁棒性的目的。

本文将对预测控制在最优性和稳定性两方面的鲁棒性，与最优控制作一个比较。

二、预测控制的状态空间表达式

预测控制的基本特征，主要有以下几个方面：

* 国家自然科学基金资助的课题。
本文于1987年4月18日收到，1988年1月3日收到修改稿。

（1）闭环预测 $y_p(k+i|k)=y_m(k+i)+q(k+i|k)$, （2.1）

（2）柔化作用 $y_r(k+i|k)=c(k+i)+v(k+i|k)$, （2.2）

（3）滚动指标
$$J(k)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{HP}\|y_P(k+i|k)-y_r(k+i|k)\|^2_{Q(i)}+\sum_{j=0}^{HM-1}\|u(k+j)\|^2_{R(j)}\right\}, \tag{2.3}$$

其中，$y_p(k+i|k)$是在k时刻对$k+i$时刻输出所作的预测值；$y_m(k+i)$是基于模型的预测值；$q(k+i|k)$是闭环校正值；$c(k+i)$是$k+i$时刻的输出理想值；$v(k+i|k)$是k时刻对$c(k+i)$的柔化项；$y_r(k+i|k)$是期望值；$Q(i)$、$R(j)$是正定权矩阵；$u(k+j)$是$k+j$时刻的控制输入；HP称为预测时域；HM称为控制时域.[1]

为了便于将预测控制和最优控制进行比较，并考虑在分析时突出主要矛盾，本文特作以下几点假设：

1. 采用离散状态空间模型，并以状态量$x(k)$作为输出；
2. 在指标(2.3)中，令$Q(i)=Q$，$i=1,\cdots,HP$；$R(j)=R$，$j=0,\cdots,HM-1$；
3. 期望轨迹$x_r(k+i|k)=0$，$\forall i,k>0$；
4. $HP=HM$，即预测时域与控制时域一致.

这时，我们得到k时刻的预测模型和滚动时域优化指标分别为

$$x_p(k+i|k)=Ax_p(k+i-1|k)+Bu(k+i-1)+q(k+i|k), \tag{2.4}$$

$$J(k)=\frac{1}{2}\left\{\|x_p(k+HP|k)\|^2_Q+\sum_{i=0}^{HP-1}[\|x_p(k+i|k)\|^2_Q+\|u(k+i)\|^2_R]\right\}, \tag{2.5}$$

其中，$q(k+i|k)$是k时刻对$q(k+i)$所作的预测，$x_p(k|k)=x(k)$. 在模型(2.4)基础上对(2.5)进行优化，并取使$J(k)$极小化的$\{u(k),\cdots,u(k+HP-1)\}$中的第一项为实际作用在系统上的控制量，可求得预测控制律为

$$u_p(k)=-[R+B^TP(1)B]^{-1}B^T[P(1)Ax(k)+\tilde{v}(k+1)], \tag{2.6}$$

其中，$P(i)$满足Riccati方程

$$P(i)=Q+A^T[P^{-1}(i+1)+BR^{-1}B^T]^{-1}A,\ P(HP)=Q \tag{2.7}$$

$$\tilde{v}(k+1)=P(1)q(k+1|k)+\sum_{j=2}^{HP}\left\{\prod_{l=2}^{j}A^T[I+P(l)BR^{-1}B^T]^{-1}\right\}\cdot P(j)q(k+j|k). \tag{2.8}$$

（2.6）式中的$u_p(k)$就是预测控制的状态空间表达式.

三、对应于最优性的鲁棒性分析

假定实际系统由方程

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+q(k+1) \tag{3.1}$$

来加以描述，$q(k+1)$ 是在实际系统的数学模型

$$x_m(k+1)=Ax_m(k)+Bu(k) \tag{3.2}$$

中未加考虑的失配项。衡量上述系统（3.1）的性能指标，通常采用二次型函数

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\|x(k)\|_Q^2+\|u(k)\|_R^2\right\}。\tag{3.3}$$

在传统的最优控制理论中，由于不考虑模型失配 $q(\cdot)$，采用的动态模型为（3.2），因此在对（3.3）中的 J 进行最优化后，得到控制律为

$$u_m(k)=-(R+B^TPB)^{-1}B^TPAx(k), \tag{3.4}$$

其中，P满足Riccati 方程 $P=Q+A^T(P^{-1}+BR^{-1}B^T)^{-1}A$。 （3.5）

显然，无论是 $u_m(k)$ 还是 $u_p(k)$ 都不是实际系统的最优控制。真正的最优控制律，应在采用动态方程（3.1）时，通过对（3.3）的最优化得到

$$u^*(k)=-(R+B^TPB)^{-1}B^T[PAx(k)+v(k+1)], \tag{3.6}$$

其中，P满足 Riccati 方程（3.5），

$$v(k+1)=Pq(k+1)+\sum_{j=2}^{\infty}[A^T(I+PBR^{-1}B^T)^{-1}]^{j-1}Pq(k+j)。\tag{3.7}$$

由于在 k 时刻，$q(k+i)$，$i\geqslant 0$，都是事先不可知的，因此 $u^*(k)$ 的计算是不可实现的，它只是在理论分析时有意义。

引理 3.1 （证明略）

对于系统（3.1），若取性能指标（3.3），则可将该指标写成另一种形式：

$$J(u)=J(u^*)+\Delta J(u), \tag{3.8}$$

其中，
$$\Delta J(u)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\|u(k)-u^*(k)\|^2_{(R+B^TPB)} \tag{3.9}$$

命题 3.1 当 $u_m(k)\neq u^*(k)$ 时，一定存在适当的 δ 和 N，使得当 $\|q(k+j|k)-q(k+j)\|<\delta$，$\forall k,j$，和$HP>N$时，有 $J(u_p)<J(u_m)$。

证 当$HP\to\infty$时，（2.7）中的$P(i)$趋于（3.5）中的P[2]。因此

$\lim\limits_{HP\to\infty}\tilde{v}(k+1)=Pq(k+1|k)+\sum_{j=2}^{\infty}[A^T(I+PBR^{-1}B^T)^{-1}]^{j-1}Pq(k+j|k)$。由（3.7）式可得$\lim\limits_{HP\to\infty}\tilde{v}(k+1)|_{q(k+j|k)=q(k+j)}=v(k+1)$，进而可以推出

$$\lim_{HP\to\infty}u_p(k)|_{q(k+j|k)=q(k+j)}=u^*(k)。\tag{3.10}$$

取 $\varepsilon=\inf\{\|u_m(k)-u^*(k)\|_{(R+B^TPB)}\}$，根据极限定理，必定存在$\delta$和$N$，使当$\|q(k+j|k)-q(k+j)\|<\delta$，$\forall k,j>0$，和$HP>N$时，

$$\|u_p(k)-u^*(k)\|_{(R+B^TPB)}<\varepsilon=\inf\{\|u_m(k)-u^*(k)\|_{(R+B^TPB)}\}。$$

则 $J(u_p)=J(u^*)+\dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\|u_p(k)-u^*(k)\|^2_{(R+B^TPB)}$

$$<J(u^*)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\|u_m(k)-u^*(k)\|^2_{(R+B^TPB)}=J(u_m).$$

证毕。

命题3.1说明，如果预测精度较高，预测时域较长，则在出现模型失配时，预测控制要比经典最优控制更接近真正的最优值 $u^*(k)$，故使得控制系统的最优鲁棒性得到改善。

四、对应于稳定性的鲁棒性分析

考虑到外部干扰不影响系统的内部稳定性，在本节中不妨假设它为零，这时模型失配只是由建模误差而引起的。为了使问题简化并便于与传统最优控制进行比较，我们假定 $q(k+1)=\Delta Ax(k)+\Delta Bu(k)$，其中 $(\Delta A,\Delta B)$ 是 (A,B) 的参数失配。因此，(3.1)式可重新写成

$$x(k+1)=\widetilde{A}x(k)+\widetilde{B}u(k), \tag{4.1}$$

其中，$\widetilde{A}=A+\Delta A$，$\widetilde{B}=B+\Delta B$ 是实际对象的系统矩阵与控制矩阵。

对于系统(4.1)在性能指标(3.3)下求最优控制，可得 $u^*(k)=Kx(k)$，其中 $K=-(R+\widetilde{B}^T\widetilde{P}\widetilde{B})^{-1}\widetilde{B}^T\widetilde{P}\widetilde{A}$，$\widetilde{P}$ 满足矩阵Riccati方程 $\widetilde{P}=Q+\widetilde{A}^T(\widetilde{P}^{-1}+\widetilde{B}R^{-1}\widetilde{B}^T)^{-1}\widetilde{A}$。这时(4.1)可写成

$$x(k+1)=\widetilde{A}_cx(k)+\widetilde{B}[u(k)-u^*(k)], \tag{4.2}$$

其中，$\widetilde{A}_c=\widetilde{A}+\widetilde{B}K$。

将(2.6)和(3.4)式分别代入(4.2)式，得到闭环系统的状态方程，分别为

$$x(k+1)=\widetilde{A}_cx(k)+\Delta_p(k), \tag{4.3}$$

$$x(k+1)=\widetilde{A}_cx(k)+\Delta_m(k), \tag{4.4}$$

其中，$\Delta_p(k)=\widetilde{B}[u_p(k)-u^*(k)]$，$\Delta_m(k)=\widetilde{B}[u_m(k)-u^*(k)]$。

按照最优控制理论，$\widetilde{A}_c$ 总是稳定的。现在来分析 $\Delta_p(k)$ 和 $\Delta_m(k)$ 对稳定性的影响。

引理4.1 假设系统的状态方程为 $x(k+1)=Ax(k)+\Delta(k)$，其中 A 是稳定的系统矩阵，$\Delta(k)$ 是模型失配，则当

$$\frac{\|\Psi x(k)\|}{\|\Psi\Delta(k)\|}>\frac{1}{1-\sigma_M(\Psi A\Psi^{-1})} \tag{4.5}$$

时，系统是稳定的；而当

$$\frac{\|\Psi x(k)\|}{\|\Psi\Delta(k)\|}<\frac{1}{1+\sigma_M(\Psi A\Psi^{-1})} \tag{4.6}$$

时，系统是不稳定的。其中$\sigma_M(\cdot)$是矩阵的最大奇异值，$\|\cdot\|$是向量的Euclid范数，Ψ是满足方程$A^T\Psi^T\Psi A-\Psi^T\Psi=-W$的非奇异矩阵，$W$是某个任意的正定矩阵。

证　由于在$x(k)\neq 0$时，

$$\|\Psi Ax(k)\|^2-\|\Psi x(k)\|^2=x^T(k)[A^T\Psi^T\Psi A-\Psi^T\Psi]x(k)$$
$$=-x^T(k)Wx(k)<0。$$

因此，$\sigma_M(\Psi A\Psi^{-1})=\max\limits_{x(k)\neq 0}\dfrac{\|\Psi Ax(k)\|}{\|\Psi x(k)\|}<1$。

构造Lyapunov 函数　$V[x(k)]=x^T(k)\Psi^T\Psi x(k)$，则其差分

$$\Delta V[x(k)]=V[x(k+1)]-V[x(k)]=x^T(k+1)\Psi^T\Psi x(k+1)-x^T(k)\Psi^T\Psi x(k)$$
$$=\|\Psi Ax(k)+\Psi\Delta(k)\|^2-\|\Psi x(k)\|^2。\tag{4.7}$$

当(4.5)成立时，在其两边同时乘上正数$\|\Psi\Delta(k)\|(1-\sigma_M(\Psi A\Psi^{-1}))$

得　$\|\Psi x(k)\|>\|\Psi\Delta(k)\|+\|\Psi x(k)\|\cdot\max\limits_{x(k)\neq 0}\dfrac{\|\Psi Ax(k)\|}{\|\Psi x(k)\|}\geqslant\|\Psi\Delta(k)\|+\|\Psi Ax(k)\|$

$\geqslant\|\Psi Ax(k)+\Psi\Delta(k)\|$。

代入(4.7)，即得　$\Delta V[x(k)]<0$。按照Lyapunov稳定性理论，系统一定是稳定的。

同理，当(4.6)式成立时，可推导出$\Delta V[x(k)]>0$，故系统一定是不稳定的。证毕

不难看出$\dfrac{\|\Psi x(k)\|}{\|\Psi\Delta(k)\|}$的物理意义是系统状态的“信噪比”，引理4.1告诉我们一种倾向，对于原来稳定的系统，提高状态的“信噪比”，对于鲁棒性是有利的。

命题 4.1　（证明略）

当$u_m(k)\neq u^*(k)$，一定存在适当的δ和N，使当$\|q(k+j|k)-q(k+j)\|<\delta$和$HP>N$时，有

$$\frac{\|\Psi x(k)\|}{\|\Psi\Delta_p(k)\|}>\frac{\|\Psi x(k)\|}{\|\Psi\Delta_m(k)\|}。$$

从命题与引理可以看出，预测控制系统对应稳定性的鲁棒性较之传统最优控制有一定的提高，是因为它改善了系统状态的“信噪比”。

参 考 文 献

〔1〕 席裕庚、张钟俊，一类新型计算机控制算法：预测控制算法，控制理论与应用，2：3（1985），1—9.

〔2〕 Anderson B.D.O. et al, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, Inc., (1971).

〔3〕 Richalet J. et al, Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes, Automatica, 14, (1982), 413-428.

〔4〕 Reid, J.G. et al, Robustness Properties of Output Predictive Dead-beat Control: SISO Case, Proc. 1979 IEEE Conf. on Decision and Control, Florida, 307-314.

The Robustness Analysis of Predictive Control Systems

Xu Xiaoming, Xi Yugeng, Zhang Zhongjun

(Dept. of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University)

Abstract

The strong robustness of the predictive control has been widely noticed in the field of process control. This paper gives a new definition of the robustness and then analyses quantatively the main reasons that make predictive control robust. It is shown that the predictive control is more robust than the optimal control due to its function to predict model/plant mismatch.