

无穷零点的渐近线计算

王 胜 国

(西南交通大学计算机科学与工程系, 四川峨嵋)

摘 要

本文从代数函数入手讨论了多变量系统的无穷零点特性, 对整数阶和分数阶无穷零点给出了统一的定义, 及其渐近线的统一计算公式, 并指出了以前有关文献的错误。这对多变量根轨迹渐近特性的研究是有用的。

一、引 言

七十年代后半期发展起来的多变量根轨迹的研究, 就是将十分有用的 Evans^[1]方法推广到多变量系统。多变量根轨迹渐近线特性的研究也就是对多变量系统的无穷零点特性的研究^[2-9]。Postlethwaite 和 MacFarlane^[2]发展了代数函数理论中的一个方法来研究。Owens^[3], Verghese 和 Kailath^[4]注意到系统的无穷零点有整数阶和分数阶。Kouvaritakis, Shaked, Edmunds, Owens^[3,5,6]都对整数阶的无穷零点的渐近特性进行了讨论, 并提出了渐近线枢点(Pivot)的概念^[5]。文[7]讨论了两类无穷零点的特点及渐近线计算; 可是有错误。Byrnes 和 Stevens^[8], Postlethwaite 和 MacFarlane^[2]等从 Newton 图来研究无穷零点的阶数和渐近线方向, 但对其渐近线枢点的研究较少。本文的目的是将从代数函数入手, 深入讨论多变量系统无穷零点的特性, 给出整数阶和分数阶无穷零点的统一定义, 及其统一的渐近线计算公式。这有助于多变量根轨迹渐近线方向和枢点的计算和分析。

二、代数函数方法与分解定理

考察图 1 所示系统。除了可能的单点轨迹外, 多变量根轨迹就是由

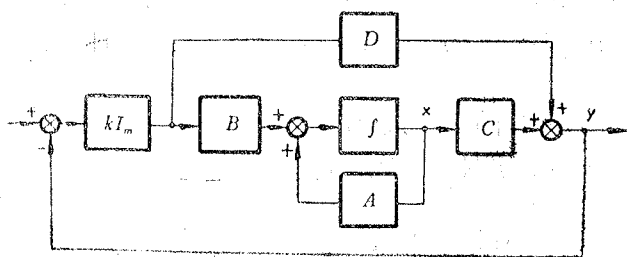


图 1 多变量反馈系统

$$b_0(s) \det[I_m + kG(s)] = 0 \quad (2.1)$$

确定的代数函数 $s(k)$, k 为正实数。其中

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \quad (2.2)$$

$b_0(s)$ 是 $\det[I_m + kG(s)]$ 中 s 的有理函数系数的最小公分母。这也正如 Owens^[3] 指出的, 是对方程

$$\det[I + kG(s)] = 0 \quad (2.3)$$

的无界解的分析。

定义 2.1 满足方程 (2.3) 的无界解 ($k \rightarrow \infty$ 时) 被称为图 1 系统的无穷零点。

代数函数 $s(k)$ 在 $k = \infty$ 的无穷零点的邻域内构成一循环系的那些无穷分支在总体上组成一个由

$$s_j(k) = (k)^{\lambda/v} (b_0 + b_1 k^{-1/v} + b_2 k^{-2/v} + \dots) \quad (2.4)$$

形式级数给出的解析函数^[2], 其中 v 是该循环的分支数, λ 是一正整数。

由 Owens^[3] 的分解定理知, 当 $G(s)$ 满足简单零空间结构时, 方程 (2.3) 可化为子结构 $G_j(s)$ 的

$$|I_{d_j} + kG_j(s)| = 0 \quad 1 \leq j \leq q \quad (2.5)$$

的研究来得到系统的无穷零点的渐近线, 其中 $\sum_{j=1}^q d_j = m$ 。进而对方程 (2.5) 应用代数函数理论将比对方程 (2.3) 更为简便。总之是对形如 (2.3) 式的研究。作展开 $G(s) = G_0 + G_1 s^{-1} + G_2 s^{-2} + \dots$, 当 G_0 满秩时, 则 $G(s)$ 没有无穷零点, 所以研究无穷零点主要是研究 G_0 不满秩情况。当满足分解定理时, 也就是研究 $G_0 = 0$ 情况。

三、无穷零点

Owens^[3] 曾给出各种无穷极点的形式为

$$s_{jl} = k^{1/v_j} \eta_{jl} + \alpha_{jl} + \varepsilon_{jl}(k), \quad (3.1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{jl}(k) = 0, \quad 1 \leq l \leq v_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3.2)$$

η_{jl} ($1 \leq l \leq v_j$) 是非零复数 $-\lambda_j$ 的非重 v_j 次方根, 这公式中隐含着 v 是正整数。它描述了渐近线方向为 η_{jl} , 枢点为 α_j 的整数 v_j 阶无穷零点。我们推广无穷零点的定义如下。

定义 3.1 一个具有如下形式的无穷零点

$$s_j = \lambda_j k^{p/q} + \eta_j(k) + \varepsilon_j(k) \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.3)$$

其中

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-p/q} \eta_j(k) = 0 \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_j(k) = 0 \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.5)$$

$\eta_j(k)$ 是 k 的函数, p 和 q 为正整数, 则它被称为 q/p 阶无穷零点。其渐近线数学表达式

为

$$s_j = \lambda_j k^{p_j/q} + \eta_j(k) \quad 1 \leq j \leq q, \quad (3.6)$$

$\lambda_j, 1 \leq j \leq q$ 为渐近线方向, 是某一非零复数的非重 q 次方根, $\eta_j(0) = \eta(0), 1 \leq j \leq q$ 为极点. 当 $\eta_j(k) = \eta, 1 \leq j \leq q$ 时, η 与 k 无关, (3.6) 式为直线.

显然, (3.1) 式是定义 3.1 中 $p=1$ 的特殊情况. 这个定义统一了整数阶和分数阶无穷零点的表达形式. 它不同于文[7]所给的定义.

四、无穷零点的渐近性质

由方程 (2.3) 知, 代数函数 $s(k)$ 无界解通常是满足若干个形如

$$\Delta = 1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} + \dots = 0 \quad (4.1)$$

的方程. 其中 $p_i, q_i, i=1, 2, \dots$ 均为正整数, $R_i, i=1, \dots$ 为任意不为零复数. 于是无穷零点的渐近性质的研究亦就是对 (4.1) 式在 $(s, k) = (\infty, \infty)$ 附近展开的主项的研究. 为此将其重新排序, 设

$$\{q_i/p_i\}_{i=1, \dots, l_1} = \min\{q_i/p_i, i=1, 2, \dots\}, \quad (4.2)$$

$p_i, j=1, \dots, l_1$, 从小到大编序. 另外, 对

$$\{p_i, q_i; j=l_1+1, \dots, l_2 \mid p_l q_i - p_i q_l = \min\{p_l q_i - p_i q_l, i=l_1+1, l_1+2, \dots\}\} \quad (4.3)$$

也按 p_i 从小到大编序, \dots .

$$4.1 \quad \frac{q_1}{p_1} < \frac{q_2}{p_2}, \quad \frac{q_1}{p_1} < \frac{q_3 - q_2}{p_3 - p_2}$$

此时可考虑 (4.1) 式中的

$$\Delta_1 = 1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} = 0. \quad (4.4)$$

定理 4.1 若系统的无穷零点满足方程 (4.4), 且 $q_1/p_1 < q_2/p_2$, 则其有 q_1/p_1 阶无穷零点. 其中

$$\lambda_j = (-R_1)^{1/q_1}, \quad j=1, \dots, q_1 \quad (4.5)$$

$\eta_j(k)$ 是形如 $\sum_i a_i k^{b_i}$, b_i 为正有理数,

$$\eta_j(0) = \left(\frac{-R_2}{\frac{p_1 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} (-R_1) p_2 / p_1} \right)^d, \quad d > 1 \text{ 整数} \quad (4.6)$$

$d = p_1 / (p_1 q_2 - p_2 q_1)$, 当 $d \leq 1$ 时, $\eta_j(k)$ 与 k 无关, 为常数 η

$$\eta_j(k) = \eta = \begin{cases} 0 & d < 1 \\ \frac{-R_2}{q_1 (-R_1) p_2 / p_1} & d = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

证 显见 s 的主项为 $(-R_1)^{1/q_1} k^{p_1/q_1}$, 设渐近线

$$s = (-R_1)^{1/q_1} k^{p_1/q_1} + \eta, \quad (4.8)$$

代入(4.4)式, 当 $d \geq 1$ 时, 令 $z = s^{-1} = 0$, 可得(4.7)式成立. 当 $d > 1$ 时, 设在 $s^{1/d}$ 面上有渐近线

$$s^{1/d} = a k^{p_1/dq_1} + b, \quad a = (-R_1)^{1/dq_1}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_1 = k^{-p_1/dq_1} \left[\frac{bd}{a} q_1 + R_2 (-R_1)^{-q_2/q_1} + O(k^{-p_1/dq_1}) \right].$$

令 $k \rightarrow \infty$, 可得 $b = \frac{-R_2}{\frac{p_1 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} (-R_1)^{p_2/q_1}}$, 当 d 为整数时, 由 $\eta_j(0) = b^d$, 得(4.6)

式. 可见定理成立.

注意 $\eta_j(0)$ 或 η 是 s 平面上所有对应 λ_j 的渐近线当 $k=0$ 时均通过的点, 因此称它为该组无穷零点在 s 平面的渐近线极点.

由定理 4.1, 可见文[7]的定理 2.1, 推论 2.1 和 2.2 等是错误的, 未考虑 $\eta(k)$, 并且 η 错为

$$\eta = \left(\frac{R_2}{\left(\frac{p_1 q_1 R_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \right) p_2 / p_1} \right)^{\frac{p_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}},$$

其错误发生在该文中待常数 t 的取值, 以及 $s^{1/\alpha}$ 平面与 s 平面之间的映射等.

$$4.2 \quad \frac{q_1}{p_1} < \frac{q_2}{p_2}, \quad \frac{q_1}{p_1} = \frac{q_3 - q_2}{p_3 - p_2} > \frac{q_4 - q_2}{p_4 - p_2}$$

此时方程(4.1)可考虑

$$\Delta_2 = 1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} + R_3 k^{p_3} s^{-q_3} = 0. \quad (4.10)$$

定理 4.2 满足方程(4.10)的无穷零点为 q_1/p_1 阶, 渐近线方向为(4.5)式, 极点

$$\eta_j(0) = \left[\frac{-R_2 - R_3 (-R_1) (p_2 - p_3) / p_1}{\frac{p_1 q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} (-R_1) p_2 / p_1} \right]^d \quad d > 1 \text{ 整数}, \quad (4.11)$$

$$\eta_j(k) = \eta = \begin{cases} 0 & d < 1 \\ \frac{-R_2 - R_3 (-R_1) (p_2 - p_3) / p_1}{q_1 (-R_1) p_2 / p_1} & d = 1, \end{cases} \quad (4.12)$$

证明略. 其中式(4.11)和(4.12)也可写成

$$\eta_j(0) = \left[\frac{-R_2 (-R_1)^{-p_2/p_1} - R_3 (-R_1)^{-p_3/p_1}}{p_1 q_1 / (p_1 q_2 - p_2 q_1)} \right]^d \quad d > 1 \text{ 整数}, \quad (4.13)$$

$$\eta_j(k) = \eta = \begin{cases} 0 & d < 1 \\ \frac{-R_2(-R_1)^{-p_2/p_1} - R_3(-R_1)^{-p_3/p_1}}{q_1} & d = 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

显然, R_2 和 R_3 之间相互折算是对称一致的.

$$4.3 \quad \frac{q_1}{p_1} < \frac{q_2}{p_2}, \quad \frac{q_1}{p_1} = \frac{q_3 - q_2}{p_3 - p_2} = \dots = \frac{q_v - q_2}{p_v - p_2} < \frac{q_{v+1} - q_2}{p_{v+1} - p_2}$$

此时, 方程 (4.1) 可考虑

$$\Delta_s = 1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} + \dots + R_v k^{p_v} s^{-q_v} = 0. \quad (4.15)$$

推论 4.1 满足方程 (4.15) 的 q_1/p_1 阶无穷零点, 其渐近线方向为 (4.5) 式, 枢点为

$$\eta_i(0) = \left(\frac{-R_2(-R_1)^{-p_2/p_1} - R_3(-R_1)^{-p_3/p_1} - \dots - R_v(-R_1)^{-p_v/p_1}}{p_1 q_1 / (p_1 q_2 - p_2 q_1)} \right)^d \quad d > 1 \text{ 整数}, \quad (4.16)$$

$$\eta_j(k) = \eta = \begin{cases} 0 & d < 1 \\ \frac{-R_2(-R_1)^{-p_2/p_1} - R_3(-R_1)^{-p_3/p_1} - \dots - R_v(-R_1)^{-p_v/p_1}}{q_1} & d = 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

$$4.4 \quad \frac{q_1}{p_1} = \frac{q_2}{p_2} < \frac{q_3}{p_3}$$

此时通常有 $p_2 = 2p_1$, $q_2 = 2q_1$. 若方程 (4.1) 可简化为

$$\Delta_4 = 1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} + R_3 k^{p_3} s^{-q_3} + R_* k^{p_1 + p_3} s^{-q_1 - q_3} = 0. \quad (4.18)$$

当无 $p_j = p_1 + p_3$ 时, $R_* = 0$, 当 p_1 与 p_2 既约时, 若上述 p_j 存在, 则必 $j = 4$, 略去高阶小量, Δ_4 可分解成

$$\Delta_4 = (1 + a_1 k^{p_1} s^{-q_1} + b_1 k^{p_3} s^{-q_3}) (1 + a_2 k^{p_1} s^{-q_1} + b_2 k^{p_3} s^{-q_3}) = 0. \quad (4.19)$$

其中 $a_{1,2} = \frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4R_2}$, $b_{1,2} = \frac{R_3}{2} \pm \frac{R_1 R_3 - 2R_*}{2\sqrt{R_1^2 - 4R_2}}$. 然后, 由定理 4.1,

可解得无穷零点的渐近线.

五、整数阶无穷零点的渐近性质

在整数阶特殊情况时, 计算公式的退化形式不仅与其他文献^[3,6]所给出的计算公式相吻合, 而且它能给出更一般情况的整数阶无穷零点的渐近线公式. 进而这就从一个方面说明了第四节的广义统一公式的正确性和普遍性.

$$1 + R_1 k s^{-q_1} + R_2 k s^{-q_2} = 0 \quad (5.1)$$

方程的整数阶无穷零点为 q_1 阶, 渐近线形式为

$$s_j = \lambda_j k^{1/q_1 + \eta} \quad j = 1, \dots, q_1, \quad (5.2)$$

其中 λ_j 满足 (4.5) 式, 枢点

$$\eta = \begin{cases} 0 & q_2 > q_1 + 1 \\ \frac{R_2}{q_1 R_1} & q_2 = q_1 + 1 \end{cases}, \quad (5.3)$$

$$1 + R_1 k s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} = 0, \quad (5.4)$$

方程有 q_1 阶无穷零点, 渐近线方向同上, 另外

$$\eta = \begin{cases} 0 & q_2 - p_2 q_1 > 1 \\ \frac{-R_2}{q_1 (-R_1)^{p_2}} & q_2 - p_2 q_1 = 1 \end{cases}. \quad (5.5)$$

当无穷零点满足方程

$$1 + R_1 k^{p_1} s^{-q_1} + R_2 k^{p_2} s^{-q_2} = 0, \quad (5.6)$$

其中 $q_1 = r p_1$, r 为正整数, 则系统有 r 阶无穷零点, 渐近线为

$$s_j = (-R_1)^{1/q_1} k^{1/r + \eta} \quad j = 1, \dots, q_1, \quad (5.7)$$

$$\eta = \begin{cases} 0 & q_2 - r p_2 > 1 \\ \frac{-R_2}{q_1 (-R_1)^{p_2/p_1}} & q_2 - r p_2 = 1 \end{cases}. \quad (5.8)$$

此时, q_1 根渐近线可分成 p_1 组, 每组 r 根, 每组各自组成 Butterworth 结构, 组间各相差相角 $\frac{360^\circ}{q_1}$ 它们全体也构成一个 Butterworth 结构。

六、例

例 1 $G(s) = s^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $|I + kG(s)| = 1 - k^2 s^{-3} + k s^{-2} - k^2 s^{-4} = 0$,

由定理 4.2, 知其有 3/2 阶无穷零点, 渐近线为 $s_j = (1)^{1/3} k^{2/3} + \eta_j(k)$, $\eta_j(0) = 1/36$, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-2/3} \eta_j(k) = 0$, $j = 1, 2, 3$.

例 2 $G(s) = s^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $|I + kG(s)| = 1 - k^2 s^{-5} + 2k s^{-4}$

$+ k^2 s^{-8} = 0$, 由定理 4.1, 有 5/2 阶无穷零点, 渐近线为 $s_j = (1)^{1/5} k^{2/5}$, $j = 1, \dots, 5$.

七、结 论

本文讨论了满足方程 (4.1) 的无穷零点的阶数及其渐近特性, 给出了整数阶和分数阶无穷零点的统一定义, 及其渐近线方向和枢点的统一计算公式。这对系统的渐近特

性分析提供了条件, 尤其它们亦适用于 G , 非简单结构系统的情况 (见例)。系统无穷零点的求解问题 (2.3) 可有各种方法化成若干个方程 (4.1) 的求解问题, 从这个意义上讲, 本文给出了计算各种系统无穷零点渐近线的通用公式。

参 考 文 献

- [1] Evans, W. R., Control System Synthesis by Root Locus Method, Trans AIEE, 69, (1950), 66-69.
- [2] Postlethwaite, I. & MacFarlane, A. G. J., A Complex variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, Springer-Verlag, Berlin, (1979).
- [3] Owens D. H., Feedback and Multivariable Systems, Peter Peregrinus, England, (1978), Chapter 6.
- [4] Verghese, G. & Kailath, T., Comments on On Structural Invariants and the Root Loci of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 29, (1979), 1077-1080.
- [5] Kouvaritakis B. & Shaked U., Asymptotic Behaviour of Root-loci of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 23, (1976), 297-340.
- [6] Kouvaritakis, B. & Edmunds, J. M., Multivariable Root Loci, A Unified Approach to Finite and Infinite Zeros, Int. J. Control, 29, (1979), 393-428.
- [7] 计重远, 多变量系统的无穷零点及其渐近线, 哈尔滨船舶工程学院学报, 1, (1984), 45-57.
- [8] Byrnes, C. I. & Stevens, P. K., The McMillan and Newton Polygons of a Feedback System and the Construction of Root Loci, Int. J. Control, 35, (1982), 29-53.
- [9] 王胜国、张念村, 带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹, 自动化学报, 11:增1, (1985), 8-16.

Calculation of Asymptotes of Infinite Zeros

Wang Shengguo

(Department of Computer Science and
Engineering, Southwest Jiaotong University)

Abstract

The features of infinite zeros of multivariable systems are discussed in view of algebraic functions in the paper. A unified definition of infinite zeros with integral or fractional orders is given. The unified formulas to calculate the asymptotes of these infinite zeros are derived. Also, some formula errors in other former papers are pointed out. These will be useful for the research of multivariable root locus asymptotic behavior.