第5卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.4
1988年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1988

线性系统极点配置控制器的鲁棒稳定性分析

段广仁　吴广玉　黄文虎

（哈尔滨工业大学航天学院）

摘　　要

本文利用所建立的线性系统鲁棒稳定性的分析结果分析了离散和连续的极点配置控制系统关于时变参数摄动在输入输出有界意义下的鲁棒稳定性.指出该控制系统对于参数摄动总具有一定的鲁棒性，并给出了保持系统输入输出有界情况下参数摄动应满足的限度.

一、问题的提出

在实际工程应用中，要获得一个系统的精确的数学模型往往是不可能的。因此，人们常借助于一个基本上反应实际系统的主要特点的近似模型作为控制器设计的依据。这样便产生了鲁棒性问题。关于鲁棒性分析方面的工作,现已有了十分可喜的成果[1~4]。

本文考虑离散和连续线性极点配置控制系统关于参数摄动的鲁棒稳定性。由于离散的情形和连续的情形有很多相似之处，为了节省篇幅，我们对这两种情形统一表示。在下面，若λ和τ分别取s（微分算子）和t时，则对应于连续的情形；若λ和τ分别取q（位移算子）和k时，则对应于离散的情形。

设考虑的实际系统如下：

$$[A(\lambda)+\Delta A(\lambda,\ \tau)]y(\tau)=[B(\lambda)+\Delta B(\lambda,\ \tau)]u(\tau)。\qquad (1)$$

其对应的名义系统为

$$A(\lambda)y(\tau)=B(\lambda)u(\tau),\qquad (2)$$

其中，$y(\tau)$为系统输出；$u(\tau)$为系统输入；$A(\lambda)$与$B(\lambda)$为已知的定常算子多项式：

$$A(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n,$$
$$B(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\cdots+b_{n-1}\lambda^{n-1}。$$

$\Delta A(\lambda,\ \tau)$与$\Delta B(\lambda,\ \tau)$为未知的时变多项式摄动：

$$\Delta A(\lambda,\ \tau)=\Delta a_0(\tau)+\Delta a_1(\tau)\lambda+\cdots+\Delta a_{n-1}(\tau)\lambda^{n-1},$$
$$\Delta B(\lambda,\ \tau)=\Delta b_0(\tau)+\Delta b_1(\tau)\lambda+\cdots+\Delta b_{n-1}(\tau)\lambda^{n-1},$$

且下述条件满足

条件A：多项式$A(\lambda)$与$B(\lambda)$互素。

本文于1987年10月21日收到。1988年6月29日收到修改稿。

采用极点配置设计方案，则控制器可选取如下[5]：

$$L(\lambda)u(\tau)=P(\lambda)[y^*(\tau)-y(\tau)], \tag{3}$$

其中，$y^*(\tau)$为一致有界的参考信号；

$$L(\lambda)=l_0+l_1\lambda+\cdots+l_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n,$$
$$P(\lambda)=p_0+p_1\lambda+\cdots+p_{n-1}\lambda^{n-1},$$

且$L(\lambda)$与$P(\lambda)$满足下式：

$$A(\lambda)L(\lambda)+B(\lambda)P(\lambda)=A^*(\lambda), \tag{4}$$

这里，$A^*(\lambda)$为满足下述条件的$2n$阶首一多项式：

条件B：多项式$A^*(\lambda)$渐近稳定。

由条件A知，满足（4）式的多项式$L(\lambda)$和$P(\lambda)$唯一存在[5]，故控制器（3）—（4）可实现。

我们的问题是，当参数摄动$\Delta a_i(\tau)$，$\Delta b_i(\tau)$，$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$满足什么条件时，根据名义系统（2）设计的控制器（3）—（4）能够保证实际闭环控制系统（1），（3）—（4）给出有界的系统输入和系统输出。

二、准备工作

在后续的讨论中，I、$\|\cdot\|$和A^T分别代表适当阶的单位矩阵、谱范数和矩阵A的转置共轭。

作为下一节的准备，本节我们建立受有线性时变参数摄动的线性系统的鲁棒稳定性定理。

定理 1 下述n维线性摄动系统

$$X(k+1)=[A+\Delta A(k)]X(k), \tag{5}$$

渐近稳定的充分条件是

1）其名义系统$X(k+1)=AX(k)$渐近稳定。

2）参数摄动矩阵$\Delta A(k)$满足下式：

$$\|\Delta A(k)\|<\frac{\sqrt{\|P\overline{A}\|^2+2\|P\|}-\|P\overline{A}\|}{\|T\|\|P\|\|T^{-1}\|}, \tag{6}$$

其中P为一对称正定矩阵，由下述二式决定：

$$\overline{A}^T P\overline{A}-P=-2I, \tag{7}$$

$$\overline{A}=T^{-1}AT, \tag{8}$$

这里，T为任意选定的n阶可逆矩阵。

证 我们只须证明$T=I$的情形，一般情形可通过对该情形引入一个线性变换并利用范数的相容性得到。

由条件1）及 Lyapunov 引理[5]知，满足（7）—（8）式的对称正定矩阵唯一存在。

我们为系统（5）取下述Lyapunov函数：

$$V(X(k)) = X(k)^T P X(k),$$

则当$\|X(k)\| \neq 0$时，有$V(X(k)) > 0$，且对于任何$X(k) \neq 0$，有

$$\begin{aligned}
&\Delta V(X(k)) = V(X(k+1)) - V(X(k)) \\
&= -2X^T X + 2X^T \Delta A^T P A X + X^T \Delta A^T P \Delta A X \\
&\leqslant \|X\|^2 [-2 + 2\|\Delta A\| \cdot \|PA\| + \|\Delta A\|^2 \|P\|] \\
&= \|P\| \cdot \|X\|^2 \left[\|\Delta A\|^2 + 2\frac{\|PA\|}{\|P\|} \|\Delta A\| - \frac{2}{\|P\|} \right] \\
&= \|P\| \cdot \|X\|^2 \left[\|\Delta A\| + \frac{\|PA\| + \sqrt{\|PA\|^2 + 2\|P\|}}{\|P\|} \right] \\
&\left[\|\Delta A\| + \frac{\|PA\| - \sqrt{\|PA\|^2 + 2\|P\|}}{\|P\|} \right] < 0.
\end{aligned}$$

从而由Lyapnov定理知，系统（5）在定理条件下是渐近稳定的。定理证毕。

对于连续系统的情形，我们有对应于定理1的下述结果（参见文[1]）。

定理 2　下述n维线性摄动系统

$$\dot{X}(t) = [A + \Delta A(t)] X(t) \tag{9}$$

渐近稳定的充分条件是

1）其名义系统$\dot{X}(t) = AX(t)$渐近稳定。

2）参数摄动矩阵$\Delta A(t)$满足下式

$$\|\Delta A(t)\| < \frac{1}{\|T\| \cdot \|P\| \cdot \|T^{-1}\|}, \tag{10}$$

其中，P为一对称正定矩阵，由下式唯一决定：

$$\bar{A}^T P + P\bar{A} = -2I, \tag{11}$$

$\bar{A}$由（8）式决定，T为任意选定的n阶可逆矩阵。

说明 1　在定理1与定理2的应用过程中，适当选取可逆矩阵T，可以减少分析的保守性或给方程（7）和（11）的求解带来方便。

三、鲁棒稳定性分析

由于一致有界参考信号$y(\tau)$不影响稳定性分析，以下我们视$y^*(\tau) \equiv 0$。

1. 控制系统的等价表示

引入下述记号：

$$A^*=\begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_0 & b_{n-1} & \cdots & b_0 \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 \quad 0 & & & \\ -p_{n-1} & \cdots & -p_0 & -l_{n-1} & \cdots & -l_0 \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$X(\tau)=[\lambda^{n-1}y(\tau)\cdots y(\tau) \quad \lambda^{n-1}u(\tau)\cdots u(\tau)]^T, \tag{13}$$

$$\Delta A^*(\tau)=\begin{bmatrix}\Delta\theta(\tau)\\ 0\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\Delta\theta(\tau)=[-\Delta a_{n-1}(\tau)\cdots-\Delta a_0(\tau)\,\Delta b_{n-1}(\tau)\cdots\Delta b_0(\tau)]. \tag{15}$$

则不难验证，实际控制系统（1），（3）—（4）可等价地表示为

$$X(k+1)=[A^*+\Delta A^*(k)]X(k) \quad （离散情形）, \tag{16}$$

或

$$\dot{X}(t)=[A^*+\Delta A^*(t)]X(t) \quad （连续情形）. \tag{17}$$

名义控制系统（2）—（4）可等价地表示为

$$X(k+1)=A^*X(k) \quad （离散情形）, \tag{18}$$

或

$$\dot{X}(t)=A^*X(t) \quad （连续情形）. \tag{19}$$

由于系统（18）和（19）与系统（2）—（4）具有相同的极点，再注意到条件B，易知系统（18）和（19）均为渐近稳定的。

2. 鲁棒稳定性分析

由（14）式易知

$$\|\Delta A^*(\tau)\|=\|\Delta\theta(\tau)\|. \tag{20}$$

分别对系统（16）和（17）应用定理1和定理2，可得本文的下述主要结果。

定理 3 设条件A，B满足，则离散控制系统（1），（3）—（4）输入输出有界的充分条件是参数摄动$\Delta\theta(k)$满足下式：

$$\|\Delta\theta(k)\|<\frac{\sqrt{\|P\overline{A}^*\|^2+2\|P\|}-\|P\overline{A}^*\|}{\|T\|\cdot\|P\|\cdot\|T^{-1}\|}, \tag{21}$$

其中，

$$\overline{A}^*=T^{-1}A^*T. \tag{22}$$

P为一对称正定矩阵，由下式唯一决定：

$$[\overline{A}^*]^T P\overline{A}^*-P=-2I, \tag{23}$$

T为任意选定的$2n$阶的可逆矩阵。

定理 4　设条件A，B满足，则连续控制系统（1），（3）—（4）输入输出有界的充分条件是参数摄动$\Delta\theta(t)$满足下式：

$$\|\Delta\theta(t)\| < \frac{1}{\|T\|\|P\|\|T^{-1}\|}, \tag{24}$$

其中，P为一对称正定矩阵，由下述二式决定：

$$[\bar{A}^*]^T P + P\bar{A}^* = -2I, \tag{25}$$

$$\bar{A}^* = T^{-1}A^*T. \tag{26}$$

T为任意选定的$2n$阶可逆矩阵。

说明 2　由上述定理可见，极点配置控制系统对于参数摄动总具有一定的鲁棒性。适当选取闭环系统特征多项式$A^*(\lambda)$，可以提高极点配置控制系统的鲁棒稳定性。

例　考虑下述连续系统

$$\left(s+\tfrac{1}{2}\right)y(t) = u(t).$$

我们选取$A^*(s) = s^2 + s + \frac{1}{2}$，则$A^*(s)$渐近稳定，且由（3）—（4）式可求得控制器如下：

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)u(t) = \frac{1}{4}[y^*(t) - y(t)].$$

根据（12）式有

$$A^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

取

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix},$$

则由（26）式有

$$\bar{A}^* = \mathrm{diag}\left[-\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \quad -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right],$$

由（25）式可解得

$$P = \mathrm{diag}[-1-i \quad -1+i],$$

且容易算得

$$\|T\| = \|T^{-1}\| = \|P\| = \sqrt{2}.$$

从而由（24）式可得该控制系统在输入输出有界条件下所允许的参数摄动范围

$$[\Delta a_0^2(t) + \Delta b_0^2(t)]^{\frac{1}{2}} < 0.354.$$

特别我们有下述较为直观但保守性稍大的结果:

$$|\Delta a_0(t)|<0.25, \quad |\Delta b_0(t)|<0.25.$$

参考文献

〔1〕 Patel, R. V. and M. Tada, Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, In Proc. Joint Automat. Contr. Conf., San Francisco, CA, Paper TD8-A, (1980).

〔2〕 Yedavalli, R. K., Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-30, (1985), 557-579.

〔3〕 Yedavalli, R. K and Z. Liang, Reduced Conservatism in Stability Robustness Bounds by State Transformation, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-31, (1986), 863-866.

〔4〕 Kemin, Z and Pramod P. K., Stability Robustness Bounds for Linear State Space Models with Structured Uncertainty, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-32, (1987), 621-623.

〔5〕 Goodwin, G. C and K. S. Sin, Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, (1984).

Robust Stability Analysis of Pole Assignment Controllers for Linear Systems

Duan Guangren, Wu Guangyu, Huang Wenhu

(Aerospace College, Harbin Institute of Technology)

Abstract

In this paper, the robust stability of both continuous and discrete pole assignment control system subject to time varying parameter perturbations is analysed by using the established robust stability analysis result for linear systems. It is pointed out that such control systems are robust to parameter perturbations; Perturbation bounds for robust stability in the bounded input and bounded output sense are given.