第6卷 第1期
1989年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.6, No.1
Mar., 1989

多变量根轨迹研究的简要回顾

王胜国

（西南交通大学计算机科学与工程系，峨眉）

摘　要

本文对自七十年代后半期以来国际上出现的多变量根轨迹的研究作了些简要的回顾。介绍了国际上这方面研究的一些主要流派和一些主要结果；也介绍了国内八十年代初开始在这方面的一些研究和主要结果。

一、引　言

1948年Evans[1]将复数变量的方法应用于单变量的线性反馈系统，开创了用根轨迹的方法来研究闭环系统的特征频率随某个实的增益参数变化的规律。它为高阶的线性反馈系统的设计提供了更强有力的工具[2]。六十年代以前，处理自动控制问题主要使用频率域方法。五十年代末和六十年代初，现代控制理论的研究蓬勃发展，从状态空间来研究MIMO的多变量系统。最优控制和最优滤波技术在空间研究方面取得了巨大成功。而对多变量工业过程，由于对象模型的不精确，或者品质指标的不明确，那时发现在由Nyquist[3]、Bode[4]与Evans[1]所奠基且至今还在不少工业应用中采用的经典单回路频率域方法和在空间应用中发展起来的精美而有效的多变量时域模型方法之间已存在着巨大的裂痕[5]。因此，在六十年代中期，频率法的研究又开始复苏。1964年Kalman[6]迈出了在经典频率法与最优控制方法之间弥合裂痕的重要的第一步，给出了最优性的频率域特征。1966年Rosenbrock[7]开拓了对多变量系统发展频率域分析和设计理论的系统性研究，他[8-10]用对角优势逆Nyquist阵列法。这条崭新的研究途径使Nyquist方法迅速地在多变量系统的研究中得到了发展。相对而言，多变量频域法中的另一条崭新的研究途径——多变量根轨迹（MVRL）的研究，亦就是将Evans方法扩展到多变量系统的研究中去，要姗姗来迟些。虽然Rosennau[11]在1968年首先探讨了MIMO的根轨迹计算的一些新规则，以及Retallak[12]在1970年也尝试仅限于双输入双输出情况的初步讨论。而一般化的MVRL研究是从1976年开始涌现在自动控制文献上的[5,13-107]。它吸引着不少学者的研究兴趣。首先是Kouvaritakis和Shaked，Kwakernaak，MacFarlane和Postlethwaite，Owens，Fortescue，不久Sastry和Desoer，Brockett，Byrnes，Edmunds，Grimble，Hahn，Verghese和Kailath，Thompson和Stein和Laub，Hung，Yagle和Levy，Stevens，Smith，……等等，还有我国的王胜国和张念村，计重远，吴智铭和许晓鸣和王伟等。十年来MVRL研究

本文于1987年11月16日收到。1988年8月26日收到改修稿。

已取得了进展，这是一条年轻的频域法途径，还不及广义 Nyquist 法成熟，但这正促使它不断发展，也鼓励着有兴趣的学者去进一步研究。

限于篇幅，下面仅就几个方面简要回顾。

二、MVRL研究的开展

对 MVRL 的真正的研究还是始于1976或略早些。一般 MVRL 就是当增益参数 ρ 在负实轴（或正实轴）上变化时，该多变量系统的闭环特征函数的根在复平面上的轨迹。已有研究结果主要是关于线性系统 MVRL 渐近特性及其补偿，这有大量的文献；最优根轨迹（ORL）的渐近特性[27,44,49,51,73,79,85,87,89]；以及根轨迹结构与系统的McMillan和Newton多边形的内在关系[5,19,78,88,89]；MVRL的出发角和抵达角[5,78,83,92,107]；MVRL 在实轴上的情况[106]以及与虚轴的交点[84]；根轨迹算法[13,16,50,68]；用奇异值分解来研究[31,80,81]；等等。

所研究的系统主要是线性时不变系统，但也开始有些对时滞系统、非线性系统和无穷维系统的研究[15,28,29,90]。所研究的系统结构主要是如图1所示，也有如图2所

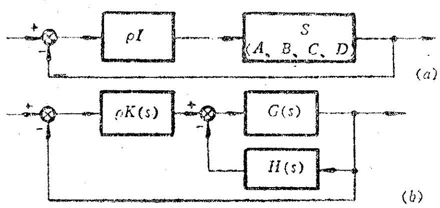

图 1　主要研究的系统结构

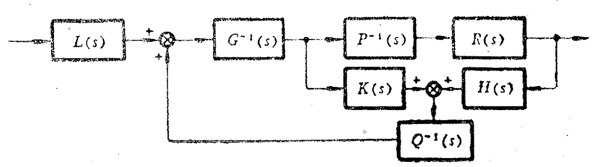

图 2　d. f. & l. s. v. f. 系统

示的 d. f. 和 l. s. v. f. 系统[97-101]，且增益参数 ρ 位于该结构的任一支路上。所研究的增益参数主要是标量增益 ρI，也有提出了参数根轨迹的研究[5]，但Brockett 与 Byrnes[17]开拓性地研究了复杂的增益结构，多项式增益 $K(\rho)=\sum_{i=0}^{r}K_i\rho^i$，研究复杂增益结构的文献已涌现了一些[17,19,21,30,60,105]。

我国学者自1981年起，也开始了对MVRL的研究。主要有首先对d. f.和 l. s. v. f. 系统的 MVRL 渐近特性的研究，及其不变性补偿和渐近线校正的综合算法的研究[97-101]；对非单构系统的MVRL 渐近特性的研究[34,103]；参数空间曲线的根轨迹的研究[105]；以及无穷零点的渐近特性研究[32,102]，等等。

在 MVRL 研究中主要的流派有如下几种。几何方法[17,38,82]，即用状态空间算子的几何结构，用形式 $A(\mathrm{mod}S_2)|s_1$ 的限制线性映射工具及其他几何观点来研究。复变量代数函数方法[5,52]，是用代数函数工具在 Riemann 面（或复平面）上进行研究。多项式矩阵代数方法[63,68]，即从传递矩阵的罗朗级数展开，用动态变换等矩阵运算方法来研究。McMillan 及 Newton 多边形法[5,19,88]，即主要从 Newton 图和 McMillan 标准型出发来研究。复杂增益结构[17]，我们也可以把它推广称为广义增益

流派，包括所有非标量增益（即非 ρI）的根轨迹的研究。

也许在现在引用1978年Owens[68]评论多变量线性系统的根轨迹研究时所说的：“这个领域是新的，其结果的最终影响现在还尚未能评断。”仍未过时。但是也正如Postlethwaite 和 MacFarlane[5]1979年说的：“将Evans 方法推广至多变量情况是有意义的”。

三、MVRL图的一些概貌

考虑图1（b）中无内环$H(s)$的系统，对象$G(s)$为$m\times m$严格真可逆传递函数矩阵，$K(s)$为控制器，$Q(s)=G(s)K(s)$，ρ 为标量增益。当 ρ 在正实轴上变化时，闭环极点所描绘的图就是MVRL。在简单零空间结构（SNS）假设下，当 $\rho\to\infty$时，一般有m组形式为

$$s_{jl}=\rho^{1/k_j}\eta_{jl}+\alpha_j+\varepsilon_{jl}(\rho)$$

$\lim\limits_{\rho\to\infty}\varepsilon_{jl}(\rho)=0$，$1\leqslant l\leqslant k_j$，$1\leqslant j\leqslant m$，的无界分支，其中 k_j 是无穷零点的整数阶，η_{jl} 是渐近线方向，α_j 为渐近线枢点（pivot）。每组渐近线有 Butterworth 结构，α_j 可为复数（若有，则共轭成对出现）。剩下的极点趋于Q(s)的不变零点。

注意，MVRL 与 SISO 的 RL 有其类似之处，如根轨迹起始于开环系统的极点，终止于其零点（包括无穷零点），其趋于无穷零点的分支都有 Butterworth 结构。但由于 MVRL 的复杂性，它们之间又必有许多差异。如SISO 的 RL 的渐近线方向的 $\eta_{jl}^{k_j}$ 为实数，枢点 α_j 对应为截矩，也必为实数；而 MVRL 中它们均可为复数。在实轴上 RL 的分支数情况，对SISO 系统适用的规则，是不能适用于 MVRL 情况[106]。进而对 MVRL 图来说，一般没有拓扑限制。再有，在 SISO 的 RL 中，只可能有整数阶的无穷零点；而 MVRL 如无 SNS 假设时，可有非整数阶的无穷零点。Owens[68]，Verghese 和 Kailath[94,95]都首先观察到了它的存在.例如，$Q(s)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{s}\\ \frac{1}{s^2} & 0\end{pmatrix}$时，系统可有$s=\rho^{2/3}$形式的无界分支，有3/2 阶的无穷零点。注意到上述$Q(s)$是非解耦的，如重新安排,无交叉 $Q(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s^2}\end{pmatrix}$，则MVRL 有一个1阶和1个2阶的无穷零点分支。另外，MVRL 的渐近线枢点还有灵敏度问题。可见 MVRL 需要深入研究。图3 示出了一个 MVRL 图.关于 MVRL 的渐近线补偿操作已有综合算法[68,97-101,etc]。

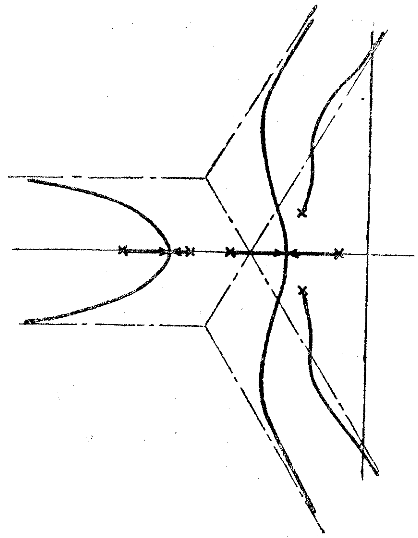

图 3 MVRL 图

四、几何方法

Kouvaritakis和Shaked[38]首先从状态空间运算子的空间几何结构出发用BC法和CB法对MVRL的渐近特性进行了研究，在SNS假设下得出了渐近线方向，并提出了枢点（pivot）的概念，即一组渐近线的交汇点，渐近线以此点旋转方向。其中CB法也是对系统的Markov参数阵来探讨研究MVRL，所以与多项式矩阵代数方法有相通之处。只是几何方法侧重于从状态空间的运算子分解出发，主要利用矩阵运算于多变量的回差行列式，然后引用Schur公式来分离不同阶次的根轨迹模式。Johnson和Grimble[35]用同时解一对矩阵——输入向量方向方程替代了Schur公式的引用这样一种新的途径来研究MVRL和ORL的渐近特性，给出一种新的算法。Kouvaritakis & Edmunds[46]对MVRL给出了一种有限和无穷零点的统一处理方法。Shaked[83]，Thompson & Stein和Laub[92]研究了MVRL的出发角和抵达角。Owens[64]研究了MVRL与系统的结构不变量关系，从Morse典型形出发，得出在定常状态反馈下，系统无穷零点的方向和阶数独立地保持不变。随着研究的进展，系统从严格真扩展到真[45]，并且注意了MVRL设计方法的研究[42,43]和根轨迹设计中观察器的作用[48]。Sastry和Desoer[81]首先用奇异值分解来研究MVRL渐近特性。Hung和MacFarlane[31]也利用此技术与Schur公式对方传递矩阵的输入输出空间，以系统对不同阶向量脉冲响应来进行分解，它表征MVRL的无界渐近线和无穷零点特性。Sastry和Desoer[82]用形式$A(\mathrm{mod}S_2)|s_1$的限制线性映射的工具，很好地研究了Markov阵与MVRL渐近特性的关系。Owens[77]也用几何方法论述了MVRL的一般结构。

在几何方法研究中，必须提到的是Brockett & Byrnes[17]开拓性地研究了复杂增益结构即多项式增益阵$K(\rho)$的MVRL。这突破了以往的一般的$K(\rho)=\rho I$的特殊情况的研究。

Postlethwaite和MacFarlane[5]提出了对广义参数根轨迹进行考察，并将其与参数稳定性联系起来。许晓鸣和吴智铭[105]也从参数空间对MVRL进行了考察。提出根轨迹可以是参数空间任意连续曲线的映射，研究了当参数微变化时根轨迹的运动方向和增量，提出了一种人机对话方式的根轨迹设计方法。计重远[33]修正了从状态空间进行渐近特性分析的分解法，扩大了适用范围。

五、复变函数方法

MacFarlane和Postlethwaite[5,52,53]et al首先用复变代数函数理论在Riemann

面上对 MVRL 进行了研究。并且将 MVRL（亦称特征频率轨线）与广义Nyquist图(特征增益轨线)作为对偶形式来进行研究，揭示了它们之间的内在关系。如图4所示，有

$$\det[sI_n - S(g)] = 0,\ s \notin \sigma(A) \Longleftrightarrow \det[gI_m - G(s)] = 0, g \notin \sigma(D)$$

其中开环增益矩阵(即传递矩阵)$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$，闭环频率矩阵 $S(g) = B(gI_m - D)^{-1}C + A$，$g = -\rho^{-1}$。MVRL的渐近性质，出发角与抵达角都可以从系统的传递矩阵来确定。$\theta = \operatorname{Arg}(\dot{s}_r(\rho))$当 $\rho = 0$ 或∞，就分别对应出发角或抵达角。

Smith[88]也用代数函数理论和Newton图讨论了MVRL 在高增益和低增益下的特性，以及它与传递函数零极点结构之间的关系。

计重远[32]讨论了各类无穷零点及其渐近线的计算和性质，但文中的统一表达式和计算公式对于分数阶无穷零点是错的，对整数阶也不严格有效。最近，王胜国[102]进一步从代数函数方法入手，给出了分数阶和整数阶无穷零点的统一定义，及其统一的渐近线计算公式，包括方向和枢点。

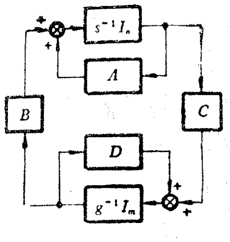

图 4　说明 s－g对偶性的反馈结构(参见图1（a）)

六、多项式矩阵代数方法

Owens[68]首先从多项式矩阵代数方法入手对 MVRL 渐近特性进行了分析，给出渐近线方向和枢点的计算公式，并采用动态变换的办法，在 SNS下给出了算法。还从设计出发，提出了校正渐近线方向和枢点的综合方法.提出了与枢点密切相关的灵敏度和渐近线逼近问题，在考察具有内环反馈的反馈系统时，Owens 首先注意到了根轨迹渐近特性不变性。还研究了MVRL 与逆系统。Johnson 和 Grimble[35]也利用回差矩阵和矩阵级数来研究渐近性质与输入向量方向。Yagle & Levy[106,107]用频率域多项式矩阵研究了 MVRL 在实轴上的分布情况，以及出发角和抵达角，整个研究也从严格真系统逐渐扩展到真的系统。

王胜国和张念村[97-100]首先考察了 d. f. 和 l. s. v. f. 系统的 MVRL 渐近特性及其十分重要的不变性，并讨论了其可实现性。提出了不变性补偿的概念.在Wolovich[108]的 d. f. 和 l. s. v. f. 算法基础上提出了带根轨迹渐近特性不变性补偿和渐近线校正的新的 d. f. 和 l. s. v. f. 综合设计算法。王胜国[101]又提出了一种对 Wolovich 算法作内部修正来内涵达到 MVRL 渐近特性不变性补偿的新算法。

另外，以往各种方法的研究都是在SNS 假设下的。采用补偿是可以以几乎处处为1的概率使 SNS 成立。但是在无 SNS 假设（NSNS）下 MVRL 的渐近特性究竟怎样也有必要考察，它与非整数阶无穷零点相关联，也与系统内部交叉耦合有关联。计重远[34]用逐步递减消去法对此 NSNS 的 MVRL 渐近特性进行了分析，涉足于NSNS 系统 MVRL 渐近线枢点的研究。后来，王胜国[103]发现计文[34]有错，进而研究给出了NSNS 系统的 MVRL 渐近线的计算公式，给出了上述的枢点研究。

七、ORL

Kwakernaak[51]首先研究了多变量线性最优调节器的渐近根轨迹。有不少学者用不同的方法在这方面进行了研究，例如Kouvaritakis[44,49]，Shaked[85,87]，Postlethwaite[79]，Owens[73]，Stavens[89]等。

如果一个左可逆系统S(A,B,C)，性能指标

$$J=\int_0^\infty [y^T(t)Qy(t)+\rho^{-1}u^T(t)Ru(t)]dt$$

minJ的最优控制系统的最优根轨迹（ORL）有如下一些主要的渐近性质。当$\rho\to\infty$时，它的渐近线全位于左半平面，ORL的无界分支有形式

$$S_{jlr}(\rho)=\rho^{1/2k_j}\eta_{jlr}+\alpha_{jr}+\varepsilon_{jlr}(\rho)$$

$\lim\limits_{\rho\to\infty}\varepsilon_{jlr}(\rho)=0$，$1\leqslant l\leqslant k_j$，$1\leqslant r\leqslant d_j$，$1\leqslant j\leqslant q$，$\eta_{jlr}=\lambda_{jr}\mu_{jl}$，$1\leqslant l\leqslant k_j$，$\lambda_{jr}>0$，$\mu_{jl}$是$(-1)^{k_j+1}$位于左半平面的各个$2k_j$次方根。而且每个枢点$\alpha_{jr}$均为纯虚数，几乎总是等于0。这也揭示了最优控制系统的根轨迹可能承受灵敏度问题。

八、Newton图、McMillan结构与MVRL

Postlethwaite[78]和MacFarlane[5]首先用Newton图来研究方的传递矩阵的MVRL在开环零极点附近的局部渐近线方向特性，于是可研究MVRL渐近线方向，出发角，抵达角，并用于ORL研究。Newton多边形是确定根轨迹分支模式的简单有效的算法。接着是Byrnes和Stevens[19]深入地研究了由MVRL的有界和无界分支引出的Newton图和开环系统的McMillan阶次关系，引入了McMillan多边形，这些几何结构和表示给出了McMillan结构、主结构和根轨迹分支模式之间关系，由此得到了几个构造MVRL的有用规则。Stevens[89]研究了ORL与开环系统的McMillan结构的关系。Smith[88]也从代数函数入手，定义了根轨迹指数（一组有理数），研究了它与传递函数的Smith—McMillan零极点结构的McMillan指数之间的关系。

九、结　　语

MVRL的研究自1976年以来，已取得了一定的进展，引起了不少学者的研究兴趣。但比起多变量频域法中的另一兄弟分支Nyquist方法的推广来说，它还年轻些，尚不及那么成熟。这正说明需要继续不断地推进这方面的研究。

限于笔者知识和篇幅，这里想涉及MVRL这个领域中的一些主要方面及结果，而未能概括其全部。文末附上了较详细的参考文献目录，提供了这些结果和应用的出处。

参考文献

〔1〕 Evans, W. R., Graphical Analysis of Control Systems, AIEE, 67, (1948), 547—551.

〔2〕 Evans, W. R., Control System Synthesis by Root Locus Method, AIEE, 69, (1950), 66—69.

〔3〕 Nyquist, H., Regeneration Theory, Bell Syst. Tech. J., 11, (1932), 126—147.

〔4〕 Bode, H. W., Network Analysis and Feedback Amplifier Design, Van Nostrad, Princeton, N. J., (1945).

〔5〕 Postlethwaite, I., MacFarlane A.G.J., A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, Springer-Verlag, Berlin, (1979).

〔6〕 Kalman, R. E., When Is a Linear Control System Optimal?, ASME J. of Basic Eng. Series D, 86, (1964), 51—60.

〔7〕 Rosenbrock, H. H., On the Design of Linear Multivariable Control Systems, Proc. 3rd IFAC Congress, 1, (1966), 1—16.

〔8〕 Rosenbrock, H. H., Design of Multivariable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array, Proc. IEE, 116, (1969), 1929—1936.

〔9〕 Rosenbrock, H. H., Computer-aided Control System Design, Academic Press, London, (1974).

〔10〕 Rosenbrock, H. H., Comments on "Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: a Survey of the Algebraic, Geometric and Complex-variable Theory", Int. J. Control, 26:1, (1977), 157—161.

〔11〕 Rosenau, G., Preprints, IFAC Symposium on Multivariable Systems, Dusseldorf, (1968).

〔12〕 Retallack, D. G., Extended Root-Locus Technique for Design of Linear Multivariable Feedback Systems, Proc. IEE, 117, (1970), 618—622.

〔13〕 Adachi, N., Hara, T., Tokumaru, H., An Algorithm for Computing Multivariable Root Loci by Pivoting, Int. J. Control, 41:1, (1985), 39—72.

〔14〕 Argoum, M. B., Vegte, J. V. D., Diagonal Dominance Design by Bode Plots and Root Loci, Int. J. Control, 33:3, (1981), 543—554.

〔15〕 Banks, S. P., Ghelmansarai, F, A., Delay Equatios, the Left-shift Operator and the Infinite-Dimensional Root Locus, Int. J. Control, 37:2, (1983), 235—249.

〔16〕 Bien, Z., Lee, J., A Note on a Computer-aided Root-locus Method, IEEE AC, 31:3, (1986), 246—247.

〔17〕 Brockett, R. W., Byrnes, C. I., Multivariable Nyquist Criteria, Root Loci and Pole Placement: A Geometric Viewpoint, IEEE AC, 26:1, (1981), 271—284.

〔18〕 Byrnes, C. I., On Root Loci in Several Variables: Continuity in the High Gain Limit, Systems & Control Lett., 1, (1981), 69—73.

〔19〕 Byrnes, C. I., Stevenes, P. K., The McMillan and Newton Polygons of a Feedback System and the Construction of Root Loci, Int. J. Control, 35:1, (1982), 29—53.

〔20〕 Commault, C., Dion, J. M., Structure at Infinity of Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, IEEE AC, 27:3, (1982), 693—696.

〔21〕 Cook, P., Hall, C. S., Root Loci with Multiple Gain Parameters, Preprints, IFAC Symposium on Multivariable Technological Systems, Laffayette, IN, (1982), 67—71.

〔22〕 DeCarlo, R. A., Saeks, R., A Root Locus Technique for Interconnected Systems, IEEE SMC, 9:1, (1979), 53—55.

〔23〕 Edmunds, J.M., Characteristic Gains, Characteristic Frequencies and Stability, Int. J. Control, 29:4, (1979), 669—706.

〔24〕 Edmunds, J. M., Calculation of Root Loci and Zeros Using a Bilinear Transformation, Inst. of Elec. Engrs., London, (1979).

〔25〕 Egardt, B., Molander, P., Multivariable Root-Loci for Positive Real Transfer Matrices, Int. J. Control, 28:2, (1978), 253—259.

〔26〕 Fortescue, P. W., The Generalized Root Locus (G. R. L.) Method (For Similar Systems with Antisymmetric Compling), Int. J. Control, 24:4, (1976), 477—492.

〔27〕 Grimble, M. J., Design of Optimal Output Regulators Using Multivariable Root Loci, Sheffield City Polytechnic Report EEE/37, (1979).

〔28〕 Hahn, H., The Application of Root-locus Technique to Non-linear Control Systems with Multiple Steady States, Int. J, Control, 27:1, (1978), 143—161.

〔29〕 Hahn, H., Comment and Correction to "The Application of Root-locus Technique to Non-linear Control Systems with Multiple Steady States", Int. J. Control, 27:1, (1978) 163—164.

〔30〕 Hahn, H., Higher Order Root Locus Technique with Applications in Control Systems Design, Braunschweig Weishaden: Friedr. Vieweg.

〔31〕 Hung, Y. S., MacFarlane, A. G.J., On the Relationships between the Unbounded Asymptote Behaviour of Multivariable Root Loci, Impulse Response and Infinite Zeros, Int. J. Control, 34:1, (1981), 31—69.

〔32〕 计重远，多变量系统的无穷零点及其渐近线，哈尔滨船舶工程学院学报，1，(1984)，45—57。

〔33〕 计重远，渐近特性的分解法，哈尔滨船舶工程学院学报，1，(1984)，59—68.

〔34〕 计重远，非单构系统的渐近特性分析，自动化学报，11:Suppl.2，(1985)，212—220.

〔35〕 Johnson, M. A., Grimble, M. J., On the Asymptotic Root-Loci of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 34:2, (1981), 295—314.

〔36〕 Grubel, G., Proc. XVI JACC, (1976), 108—112.

〔37〕 Kouvaritakis, B., Ph. D. Thesis, U. of Mancheste, U. K., (1974).

〔38〕 Kouvaritakis, B., Shaked, U., Asymptotic Behaviour of Root-Loci of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 23:3, (1976), 297—340.

〔39〕 Kouvaritakis, B., MacFarlane, A. G. J., Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros, Ibid., 23, (1976), 149—181.

〔40〕 Kouvaritakis, B., Edmunds, J. M., The Characteristic Frequency and Characteristic Gain Design Method for Multivariable Feedback Systems, Proc. Alternatives for Linear Multivariable Control, National Eng. Consortium, Chicago, (1977), 229—246.

〔41〕 Kouvaritakis, B., Gain Margins and Root Locus Asymptotic Behaviour in Multivariable Design——Part I The Properties of the Markov Parameters and the Use of High Feedback Gain, Int. J. Control, 27:5, (1978), 705—724.

〔42〕 Kouvaritakis, B.,——Part II A Critical Appraisal of Frequency Response Methods from a Root Locus Point of View, Ibid., 27:5, (1978), 725—751.

〔43〕 Kouvaritakis, B., Further Comments on Asymptotic Behaviour of Root Loci of Linear Multivariable Systems, Ibid., 27:6, (1978), 981.

〔44〕 Kouvaritakis, B., The Optimal Root Loci of Linear Multivariable Systems, Ibid., 28:1, (1978), 33—62.

〔45〕 Kouvaritakis, B., Asymptotic Multivariable Root-Loci Behaviour for Non-proper Systems, Ibid., 28:3, (1978), 419—440.

〔46〕 Kouvaritakis, B., Edmunds, J.M., Multivariable Root Loci: a Unified Approach to Finite and Infinite Zeros, Ibid., 29:3, (1979), 393—428.

〔47〕 Kouvaritakis, B., Theory and Practice of the Characteristic Locus Design Method, Proc. IEE, 126:6, (1979), 542—548.

〔48〕 Kouvaritakis, B., The Role of Observers in Root Locus Design, Int. J. Systems Sci., 11:3, (1980), 355—361.

〔49〕 Kouvaritakis, B., On the Asymptotic Behaviour of Optimal Root Loci, Int. J. Control, 33:6, (1981), 1165—1170.

〔50〕 Kouvaritakis, B., Daniel, R. W., A Comparison between the NAM and Related Techniques with a Resent Method for the Computation of Zeros and Zero Directions, Ibid., 39:3, (1984), 581—586.

〔51〕 Kwakernaak, H., Asymptotic Root Loci for Multivariable Linear Optimal Regulators, IEEE AC, 21:3, (1976), 378—382.

〔52〕 MacFarlane, A. G. J., Postlethwaite, I., The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci, Int. J. Control, 25:1 (1977), 81—127.

〔53〕 MacFarlane, A. G. J., Postlethwaite, I., Characteristic Frequency Functions and Characteristic Gain Functions, Ibid., 26:2, (1977), 265—278.

〔54〕 MacFarlane, A. G. J., Kouvaritakis, B., Edmunds, J. M., Complex Variable Methods for Multivariable Feedback Systems Analysis and Design, Alternatives for Linear Multivariable Control, National Eng. Consortium, Chicago, (1978), 189—228.

〔55〕 MacFarlane, A. G. J., The Development of Frequency Response Methods in Automatic Control, IEEE AC, 24:2, (1979), 250—265.

〔56〕 MacFarlane, A. G. J., Karcanias, N., Relationships between State-space and Frequency-response Concepts, Preprints of 7th IFAC, 3, (1978), 1771—1779.

〔57〕 MacFarlane, A. G. J., Ed., Frequency Response Methods in Control Systems, IEEE Reprint Series, IEEE, New York, (1979).

〔58〕 MacFarlane, A.G.J., Complex-Variable-Design Methods, (Munro, N., Ed.), Modern Approaches to Control Systems Design, Peter Peregrinis Stevenage, England, (1979).

〔59〕 MacFarlane, A. G. J., Ed., Complex Variable Methods for Linear Multivariable Feedback Systems, Taylor and Francis, London, (1980).

〔60〕 Nwokah, O, D. I., Multiple Gain Parameter Multivariable Root Locus, Sys. Cont., Lett., 3, (1983), 192—201.

〔61〕 Owens, D. H., Root-Loci Concepts for Kth-order Type Multivariable Structures, Proc, IEE, 123:9, (1976), 933—940.

〔62〕 Owens, D. H., Comments on "Asymptotic Behaviour of Root-Loci of Linear Multivariable Systems", Int. J. Control, 25:5, (1977), 819—820.

〔63〕 Owens, D. H., Note on Series Expansions for Multivariable Root-Loci, Ibid., 26:4, (1977), 549—557.

〔64〕 Owens, D. H., Structural Invariants and the Root-Loci of Linear Multivariable Systems, Ibid., 28:2, (1978), 187—196.

〔65〕 Owens, D. H., Dynamic Transformation and the Calculation of Multivariable Root-Loci, Ibid., 28:3, (1978), 333—343.

〔66〕 Owens, D. H., Multivariable Root-Loci and the Inverse Transfer-Function Matrix, Ibid., 28:3, (1978), 345—351.

〔67〕 Owens, D. H., Structure and Compensation of Multivariable Rootr-Loci, Proc. 1978 IEEE Conf. on Decision and Control Incl. the 17th Symposium on Adaptive Processes, San Diego, CA, USA, (1979), 824—825.

〔68〕 Owens, D. H., Feedback and Multivariable Systems, Peter Peregrinus, England, (1978).

〔69〕 Owens, D. H., Compensation Theory for Multivariable Root Loci, Proc. IEE, 126:6, (1979), 538—541.

〔70〕 Owens, D. H., Asymptotic Root Loci for Proper Multivariable

Systems, Ibid., 126:8, (1979), 788—789.

〔71〕 Owens, D. H., Computation and Characterisation of the Zeros of Linear Multivariable Systems, Ibid., 126:12, (1979), 1353—1357.

〔72〕 Owens, D. H., A Note on Compensation of Multivariable Root Loci, Int. J. Control, 29:3, (1979), 387—391.

〔73〕 Owens, D. H., On the Computation of Optimal System Asymptotic Root—Loci, IEEE AC, 25:1, (1980), 100—102.

〔74〕 Owens, D. H., A Note on the Orders of the Infinite Zeros of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 31:2, (1980), 409—412.

〔75〕 Owens, D. H., Field, A. D., Graphical Bounds for the Root-Loci of Linear Multivariable Systems, Ibid., 31:4, (1980), 709—722.

〔76〕 Owens, D. H., Multivariable Root Loci: An Emerging Design Tool?, Proc. IEE Int. Conf. on Control and its Applications, Warwick, (1981).

〔77〕 Owens, D. H., On the Generic Structure of Multivariable Root-Loci, Int. J. Control. 39:2, (1984), 311—319.

〔78〕 Postlethwaite, I., The Asymptotic Behaviour, the Angles of Departure, and the Angles of Approach, of the Characteristic Frequency Loci, Ibid., 25:5 (1977), 677—695.

〔79〕 Postlethwaite, I., A Note on the Characteristic Frequency Loci of Multivariable Linear Optimal Regulators, IEEE AC, 23:4, (1978), 757—760.

〔80〕 Sannuti, P., Wason, H., A Singular Perturbation Canonical Form of Invertible Systems: Determination of Multivariable Root Loci, Int. J. Control, 37:6, (1983), 1259—1286.

〔81〕 Sastry, S.S., Desoer, C. A., Asymptotic Unbounded Root Loci by the Singular Value Decomposition, Elec. Research Lab., Memorandum UCB/ERL M79/63, U. of California, Berkeley, CA, (1979).

〔82〕 Sastry, S. S., Desoer, C. A., Asymptotic Unbounded Root Loci—— Formulas and Computation, IEEE AC, 28:5, (1983), 557—568.

〔83〕 Shaked, U., The Angles of Departure and Approach of the Root-Loci in Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, 23:4, (1976), 445—457.

〔84〕 Shaked, U., The Intersection of the Root-Loci of Multivariable Systems with the Imaginary Axis, Ibid,, 25:4 (1977), 603—607.

〔85〕 Shaked, U., Kouvaritakis, B., The Zeros of Linear Optimal Control Systems and Their Role in High Feedback Gain Stability Design, IEEE AC, 22:4, (1977), 597—599.

〔86〕 Shaked, U., The Zero Properties of Linear Passive Systems, IEEE AC, 22:6, (1977), 973—974.

〔87〕 Shaked, U., The Asymptotic Behaviour of the Root-Loci of Multivariable Optimal Regulators, IEEE AC, 23:3, (1978), 425—460.

〔88〕 Smith, M. C., Multivariable Root-Locus Behaviour and the Relationship to Transfer-Function Pole-Zero Structure, Int. J. Control, 43:2, (1986). 497—515.

〔89〕 Stevens, P. K., Optimal Systems Root Loci: Relation to the McMillan Sructure of the Open-Loop Systems, IEEE AC, 27:6, (1982), 1239—1241.

〔90〕 Sun, I. H., Bien, Z., A Root-Locus Technique for Linear Systems with Delay, IEEE AC, 27:1, (1982), 205—208.

〔91〕 Thompson, P. M., Stein, G., Laub, A. J., Analysis Techniques for Multivariable Root Loci, Lab. for Information and Decision Systems, Report LIDS-P-965, M. I. T., MA, USA.

〔92〕 Thompson, P. M., Stein, G., Laub, A. J., Angles of Multivariable Root Loci, IEEE AC, 27:6, (1982), 1241—1243.

〔93〕 Trentelman, H., On the Assignability of Infinite Root Loci in Almost Disturbance Decoupling, Int. J. Control, 38:1, (1983), 147—167.

〔94〕 Verghese, G., Kailath, T., Comments on "On Structural Invariants and the Root Loci of Linear Multivariable Systems", Ibid., 29:6, (1979), 1077—1080.

〔95〕 Verghese, G., Kailath, T., Rational Matrix Structure, IEEE AC, 26:2, (1981), 434.

〔96〕 Walach, E., Zeheb, E., Root Distribution for the Ellipse, IEEE AC, 27:4, (1982), 960—963.

〔97〕 王胜国, M. S. Thesis, 中国科学技术大学, (1981).

〔98〕 王胜国，带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹，中国自动化学会第三届全国控制理论及其应用学术会议论文，四川峨眉，(1982).

〔99〕 王胜国，带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹补偿， Ibid., (1982).

〔100〕 王胜国、张念村，带动态前馈和线性状态变量反馈的多变量系统的根轨迹，自动化学报，11:Suppl. 1, (1985), 8—16.

〔101〕 王胜国，具有根轨迹渐近特性不变的广义补偿的一种综合算法，Ibid., 13:4, (1987), 287—292.

〔102〕 王胜国，无穷零点的渐近线计算，控制理论与应用，5:4, (1988).

〔103〕 王胜国，关于"非单构系统的渐近特性分析"的商榷，西南交通大学计算机科学与工程系学术报告会论文，(1987).

〔104〕 吴智铭、许晓鸣，王伟，多变量控制系统频域分析和设计的综述，控制理论与应用，3:2, (1986), 1—11.

〔105〕 许晓鸣、吴智铭，多输入多输出系统的广义根轨迹设计方法，上海交通大学九十周年校庆学术报告会论文，(1986).

〔106〕 Yagle, A. E., Levy, B. C., Multivariable Root Loci on the Real

Axis, Int. J. Control, 35:3, (1982), 491—507.

[107] Yagle, A. E., Levy, B. C., Equations for the Angles of Arrival and Departure for Multivariable Root Loci Using Frequency-Domain Methods, IEEE AC, 28:1, (1983), 118—121.

[108] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, New York, (1974).

A Brief Review of Multivariable Root Locus Research

Wang Shengguo

(Department of Computer Science & Engineering, Southwest Jiaotong University, Emei)

Abstract

This Paper gives a brief review of multivariable root locus research arised from the second half of 1970's in the world. Some main international research schools and results on this area are introduced, And, some Chinese researchers' work and their results on this area arised from the beginning of the 1980's are also introduced in this paper.

国际学术会议报导

第11届国际自动化大会(11th IFAC CONGRESS)定于1990年8月13—17日在苏联塔林(Tallin)举行。会议论文内容包括应用、生物工程、元件与仪表、计算机、发展中的国家、经济与管理系统、教育、制造技术、控制数学、自动化的社会影响、空间、系统工程、词汇与标准、理论等方面。文章摘要截稿日期：1989年5月。全文截稿日期：1989年11月。填写注册表日期：1990年1月。