第6卷 第1期 控制理论与应用 Vol.6, No.1
1989年3月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Mar., 1989

多变量系统鲁棒性复数极点配置的一种新方法*

蔡刚强 周其节
（中南林学院林工系，株州）（华南理工大学自动化系，广州）

摘 要

本文对线性定常多变量系统的鲁棒性极点配置问题，给出了一种算法。这个算法对指定闭环极点中含共轭复极点的情形，用起来十分方便，它把一个带约束优化问题变成了一个无约束优化问题求解，本文末还给出了一个数值例子。

一、引 言

多变量控制理论中一个非常重要的问题，是利用状态反馈配置闭环极点。

设能控的线性定常多变量系统的动态方程为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1}$$

其中，$x\in R^n$，$u\in R^m$，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$，不失一般性，假设B列满秩。系统（1）可通过状态反馈配置极点。令

$$u(t)=Fx(t)+v(t) \tag{2}$$

其中，$v\in R^m$，$F\in R^{m\times n}$。引入状态反馈后，系统动态方程为

$$\dot{x}(t)=(A+BF)x(t)+Bv(t) \tag{3}$$

它具有所希望的极点。

Wonham[1]证明了，当一个线性多输入系统能控时，可以用状态反馈任意配置一组自共轭的闭环极点。众所周知，除了单输入系统，配置一组指定闭环极点的闭环系统不是唯一的。这种自由度来自状态反馈，在构造闭环系统时，除了极点的配置外，与极点相应的特征向量的选择还有一定的余地[2]。配置多输入系统的闭环极点时存在的自由度可有多种用途，其中之一，就是用来减小闭环极点对系统参数变化（即$\Delta(A+BF)$）的灵敏度。

Wilkinson[3]指出：

1．如果（$A+BF$）是非亏损的，那么闭环极点$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$对$A$、$B$和$F$中产生的扰动的灵敏度的大小，依赖于所谓的条件数$c_i(i=1,2,\cdots,n)$的大小，$c_i$越小，闭

*高等学校博士学科点专项科研基金资助的课题．
本文于1988年1月收到．1988年8月收到修改稿．

环极点对扰动$\Delta(A+BF)$就越不敏感。

2．如果（$A+BF$）是非亏损的，而（$A+B\widetilde{F}$）是亏损的，那么（$A+B\widetilde{F}$）的特征值的鲁棒性比（$A+BF$）的特征值的鲁棒性要差得多。

Wilkinson[3]还指出：

$$\max c_i \leqslant K_2(X) \triangleq \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

这里，$K_2(X)$是特征向量矩阵

$$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n] \tag{5}$$

的条件数，而且，条件数取最小值 $c_i=1(i=1,2,\cdots,n)$的充要条件是（$A+BF$）为正规矩阵，即

$$(A+BF)^H(A+BF)=(A+BF)(A+BF)^H \tag{6}$$

这里，H表示共轭转置。在这种情况下，（$A+BF$）的特征向量可以给出C^n中的一组正交基，于是J.kautsky等人[4]将鲁棒性极点配置问题如下提出：

给定（A,B）能控，找一个实矩阵F和非奇异矩阵X，满足

$$(A+BF)X=X\Lambda \tag{7}$$

这里，$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$x_i\in C^n,i=1,2,\cdots,n$，$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为指定闭环极点，并且使$X$的列向量尽可能正交。

对于指定闭环极点全为实极点的情形，J.kautsky 等人[4]提出了四种算法，但这四种算法都不便于直接推广到配置共轭复极点的情形。本文给出一种鲁棒性闭环极点（含共轭复极点）配置的算法。

二、鲁棒性复数极点配置算法

对于矩阵$[A-\lambda_iI,B],i=1,2,\cdots,n$，因为（$A,B$）能控，所以矩阵$[A-\lambda_iI,B](i=1,2,\cdots,n)$不论$\lambda_i$取什么值，总是行满秩的，因此$[A-\lambda_iI,B](i=1,2,\cdots,n)$的右零空间是（$n+m$）维复空间中的一个$m$维子空间。于是，我们可以找到列满秩矩阵

$\begin{bmatrix} N(\lambda_i) \\ M(\lambda_i) \end{bmatrix}$，这里，$N(\lambda_i)\in C^{\times m}$，$M(\lambda_i)\in C^{m\times m}$，$i=1,2,\cdots,n$。它的列向量所张成的空间，就是$[A-\lambda_iI,\ B]$的右零空间。

由文献[2]，可有如下结论：

结论 1 $\begin{bmatrix} N(\lambda_i) \\ M(\lambda_i) \end{bmatrix}$和$B$列满秩$\Longrightarrow N(\lambda_i)$列满秩（$i=1,2,\cdots,n$）

由结论1可知，由$N(\lambda_i)$的列向量张成的空间是n维复空间中的一个m维子空间，我们用$L[N(\lambda_i)]$来记这个空间。

结论 2 满足（7）式的x_i必属于$L[N(\lambda_i)]$，即：

$$x_i\in L[N(\lambda_i)], \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

结论 3 如果1）$x_i(i=1,2,\cdots,n)$是C^n中的线性无关组；2）$x_i=\overline{x_j}$，如果$\lambda_i=\overline{\lambda_j}$；3）$x_i\in L[N(\lambda_i)]$，则满足（7）式的实矩阵$F$存在，且唯一。

由上面的结论可知：鲁棒性极点配置问题可归结为寻找尽可能正交的向量组 $x_i \in L[N(\lambda_i)]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

容易看出：

$$x_i \in L[N(\lambda_i)],\ i=1,2,\cdots,n \Longleftrightarrow AX-X\Lambda=-BG$$

这里，$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$G=[g_1,g_2,\cdots,g_n]\in C^{m\times n}$，$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$ 互不相等，且不是A 的特征值.

根据文献[5]，如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$互不相等，且不是$A$的特征值，则对任意的$G$，从

$$AX-X\Lambda=-BG \tag{8}$$

中解出的X，“几乎总是”非奇异的. 于是，鲁棒性极点配置问题，实际上也是要找一个G，使满足（8）式的X的列向量尽可能正交. 而找这样的G的问题可变成以下的非线性优化问题：

$$\min_{AX-X\Lambda=-BG} J=\min_{AX-X\Lambda=-BG}\left\{\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}}(x_i^T x_j)^2+\sum_{i=1}^{n}(1-x_i^T x_i)^2\right\}$$

$$=\min_{AX-X\Lambda=-BG}\{\mathrm{tr}[I-X^TX]^2\} \tag{9}$$

对于闭环极点中含有共轭复极点

$$\lambda_i=\overline{\lambda_j},\quad(i\ne j,\ 1\le i,\ j\le n)$$

的情形，可以变成以下的非线性优化问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{AX-X\Lambda=-BG} J=\min\limits_{AX-X\Lambda=-BG}\{\mathrm{tr}[I-X^HX]^2\}\\ \text{约束：}\ x_i=\overline{x_j}\quad(i\ne j,\quad 1\le i,j\le n)\end{cases} \tag{10}$$

实际上，以后我们会看到，在解问题（10）时，只要对初始值的选择加以适当限制，就总可满足

$$x_i=\overline{x_j}\quad(i\ne j,1\le i,j\le n)$$

下面我们来考虑

$$J+\Delta J=\mathrm{tr}[I-(X+\Delta X)^H(X+\Delta X)]^2$$

略去高阶小量，得

$$J+\Delta J\approx J+\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[-4X^H\Delta X+4X^HXX^H\Delta X]\}$$

故

$$\Delta J\approx \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[-4X^H+4X^HXX^H]\Delta X\}$$

而由　$A(X+\Delta X)-(X+\Delta X)\Lambda=-B(G+\Delta G)$可知

$$A\Delta X-\Delta X\Lambda=-B\Delta G \tag{11}$$

由文献[6]可知，满足上式的ΔX可表示为

$$\Delta X=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_{ij}A^iB\Delta G\Lambda^j \tag{12}$$

这里，$\gamma_{ij}(i=0,1,\cdots,n-1;\ j=0,1,\cdots,n-1)$ 为由A，Λ决定的某个常数。于是，有：

$$\Delta J = \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[(-4X^H + 4X^H X X^H)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_{ij}A^i B\Delta G \Lambda^j]\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_{ij}\Lambda^j[-4(X^H - X^H X X^H]A^i B\Delta G]\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[VB\Delta G]\} \tag{13}$$

这里，$V \triangleq \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\gamma_{ij}\Lambda^j[-4(X^H - X^H X X^H)]A^i$。

再根据文献[6]可得

$$\Lambda V - VA = -4(X^H - X^H X X^H)$$

将上式两边进行共轭转置，得

$$A^H V^H - V^H \Lambda^H = -4(XX^H X - X) \tag{14}$$

由(13)式可知：$\dfrac{\partial J}{\partial G} = B^H V^H$

根据上面的论述，可有下面的算法：

1．根据Λ选取某一G_0，使G_0中的共轭向量与Λ中对应的共轭元素所处的列的位置一致，设$i=0$，$\varepsilon>0$。

2．解矩阵方程

$AX_i - X_i\Lambda = -BG_i$，求得$X_i(X_i \in C^{n\times n})$，计算$J = \mathrm{tr}(I - X_i^H X_i)^2$。

3．解矩阵方程

$A^H V_i^H - V_i^H \Lambda^H = -4(X_i X_i^H X_i - X_i)$，求得$V_i^H$ $(V_i^H \in C^{n\times n})$。

4．计算 $\dfrac{\partial J}{\partial G} = B^H V_i^H$ 。

5．计算 $\left\|\dfrac{\partial J}{\partial G}\right\|_F$，若 $\left\|\dfrac{\partial J}{\partial G}\right\|_F < \varepsilon$，则停机，否则6。

6．解 $J(G_i - \alpha_i B^H V_i^H) = \min\limits_{\alpha>0} J(G_i - \alpha B^H V_i^H)$，求出$\alpha_i$，令$\Delta G_i = -\alpha_i B^H V_i^H$。

7．计算$G_{i+1} = G_i + \Delta G_i$，$i+1 \Rightarrow i$，回转2。

在上面的算法中，如果Λ中有

$$\lambda_i = \overline{\lambda}_j (i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$$

则由于在算法的步骤1选择了$g_i^{(0)} = \overline{g_j^{(0)}}(i \neq j, 1 \leq i, j \leq n)$，这里$g_i^{(0)}$、$g_j^{(0)}$分别表示$G^0$的第$i$列、第$j$列。

可以证明[11]，在迭代过程中，总有

$$x_i^{(k)} = \overline{x_j^{(k)}}\ (i \neq j, 1 \leq i, j \leq n),\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

这里，$x_i^{(k)}$、$x_j^{(k)}$分别表示X_k的第i列、第j列．

三、对算法数值上的一些分析

1．在算法的步骤2和步骤3中，都需要求解如下形式的矩阵方程：

$$AX - X\Lambda = D \tag{15}$$

这里，$A\in R^{n\times n}$，$D\in C^{n\times n}$，$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n\}$，$\lambda_i\in C(i=1,2,\cdots,n)$，且不是$A$的特征值。

我们来考虑矩阵方程（15）的性态：

1）矩阵方程（15）实际上是n^2维空间的一个线性变换，不妨改写为如下形式：

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

这里，$P\in C^{n^2\times n^2}$，

x_i、d_i分别为矩阵$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$D=[d_1,d_2,\cdots,d_n]$的第i列。由于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$不是$A$的特征值，所以$P$为非奇异阵[7]，根据文献[8]，$P$可表示为如下形式：

$$P=(I_n\otimes A)+(\Lambda\otimes I_n)$$

这里，“$\otimes$”表示Kroneker乘积。

设　$\hat{X}\triangleq\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$\hat{D}\triangleq\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$

而　$\hat{y}\in C^{n_2}$，满足

$$(P+E)\hat{Y}=\hat{D}+F$$

这里，E、F为扰动矩阵，$\|P^{-1}\|\,\|E\|<1$。

根据文献[9]，有：

$$\frac{\|\hat{X}-\hat{Y}\|}{\|\hat{X}\|}\leqslant\frac{\|P^{-1}\|\,\|P\|}{1-\|P^{-1}\|\,\|E\|}\left\{\frac{\|E\|}{\|P\|}+\frac{\|F\|}{\|\hat{D}\|}\right\} \tag{17}$$

若$E=0$，则（17）式就是

$$\frac{\|\hat{X}-\hat{Y}\|}{\|\hat{X}\|}\leqslant\|P^{-1}\|\,\|P\|\;\frac{\|F\|}{\|\hat{D}\|}$$

即$\hat{X}$的相对误差被$\hat{D}$的相对误差乘上$\|P^{-1}\|\,\|P\|$所限制，同样是这个因子在（17）式中也起了控制作用。于是，可定义条件数：$K(P)\triangleq\|P^{-1}\|\,\|P\|$，以此度量（15）式的性态。

2）由于（15）式中Λ为对角阵，所以求解矩阵方程（15）时，实际上可化为分别

求解n个线性方程组：

$$(A-\lambda_i I)x_i=d_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

这里，x_i、d_i分别为矩阵X、D的第i列。

类似于（1），可定义条件数

$$K(A-\lambda_i I)=\|(A-\lambda_i I)^{-1}\|\,\|A-\lambda_i I\|,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

它们也可用来度量（15）式的性态，而且它们比前面所述的量度来得更精细，条件数的计算也更简便。

2．在算法的计算过程中，关键是要解步骤2、步骤3中的两个矩阵方程，因为这两个矩阵方程均可化为求解n个线性方程组：

$$(A-\lambda_i I)x_i=d_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

所以我们可用选主元高斯消去法来求解，而且由向后误差分析可知，这个算法是数值稳定的[10]，也即解两个矩阵方程的算法，数值上是稳定的。

四、数 值 例 子

系统动态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix} -0.1094 & 0.0628 & 0 & 0 & 0 \\ 1.306 & -2.132 & 0.9807 & 0 & 0 \\ 0 & 1.595 & -3.149 & 1.547 & 0 \\ 0 & 0.0355 & 2.632 & -4.257 & 1.855 \\ 0 & 0.0227 & 0 & 0.1636 & -0.1625 \end{pmatrix}x(t)$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.0638 & 0 \\ 0.0838 & -0.1936 \\ 0.1004 & -0.206 \\ 0.0063 & -0.0128 \end{pmatrix}u(t)$$

指定闭环极点为

$$-0.07732+j0.05,\quad -0.07732-j0.05,\quad -0.8953,\quad -2.841,\quad -5.982$$

给定：

$$G_0=\begin{bmatrix} 0.1+j0.12 & 0.1-j0.12 & 3.2 & 2.1 & 4.5 \\ 2.6+j0.5 & 2.6-j0.5 & 5.9 & 7.3 & 3.1 \end{bmatrix}$$

迭代25次后，J由13.4867减小到2.9194。

最后计算得的特征向量矩阵为

$$
\begin{bmatrix}
0.00901-j0.00311 & 0.00901+j0.00311 & -0.75639 & & 0.00296 \\
-0.14343+j0.04960 & -0.14343-j0.04960 & -0.22120 & -0.35844 & -0.27651 \\
-0.32747+j0.05413 & -0.32747-j0.05413 & 0.60834 & 0.68551 & 0.64744 \\
0.13544+j0.02991 & 0.13544-j0.02991 & 0.08019 & 0.63345 & 0.71014 \\
0.91242-j0.12233 & 0.91242+j0.12233 & -0.04946 & -0.01832 & -0.00720
\end{bmatrix}
$$

$$
F=\begin{bmatrix}
-0.02556 & 4.40737 & -0.40821 & 0.01186 & 0.41014 \\
-0.70393 & -0.80530 & 0.26675 & 3.26907 & 6.74249
\end{bmatrix}
$$

五、结　论

配置鲁棒性复数极点时，对共轭复数极点λ_i、$\lambda_j(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$，要求与其相应的特征向量$x_i$，$x_j(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$也是共轭的，这样的约束对以往的一些算法是难以处理的，而本文所述的算法则容易处理这种约束问题，只要对迭代初始值加以适当约束，则在这种算法的迭代过程中，始终自动满足x_i、$x_j(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$共轭。这种算法中的主要步骤是求解形如（15）式的矩阵方程，本文讨论了这种矩阵方程的性态，并说明了求解这种矩阵方程的算法是数值稳定的。

参 考 文 献

〔1〕 Wonham, W.M., On pole assignment in multi-input controllable linear systems, IEEE Trans. Autom. Contr., AC—12, (Dec. 1967), 660—665.

〔2〕 More, B.C., On the flexibility by state feedback in multivariable systems beyond closed loop eigenvalue assignment, IEEE Trans. Autom. Contr., AC—21, (Oct. 1976), 689—692.

〔3〕 Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, London, (1965).

〔4〕 Kautsky, J., Nichols, N.K., Dooren, P., Robust pole assignment in linear state feedback, Int.J.Control, 41:5, (1985), 1129—1155.

〔5〕 Bhattacharyya, S.P., de Souza, E., Pole assignment via Sylvester's equation, Systems and Controls Letters, 1:3, (1981).

〔6〕 Eurice de Souza, Bhattacharyya, S.P., Controllablity, observablity and the solution of $AX-XB=C$, Lin. Alg. and Its Applications, 39, (1981), 167—188.

〔7〕 Chen, C.T., Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and

Winston, New York,(1984), Appendix F.

〔8〕 Golub, G.H., Nash, S., Van Loan, C., A Hessenberg—Schur method for the Problem $AX+XB=C$, IEEE Trans. Autom. Contr., AC—24:6 (1979), 909—913.

〔9〕 J.M.奥特加著，张丽君等译，数值分析，高等教育出版社，北京，(1983).

〔10〕 曹浩元等，矩阵计算与方程求根，高等教育出版社，北京，(1979).

〔11〕 蔡刚强，多变量系统鲁棒性极点配置问题研究，华南工学院硕士学位论文，(1986).

A New Algorithm for the Robust Complex Pole Assignment of Multivariable Systems

Cai Gangqiang

(Department of Forest Products Industry, Central—South Forestry University, Zhuzhou)

Zhou Qijie

(Department of Automatic Control, South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

In this paper an algorithm is given for the robust pole assignment of multivariable systems. It deals with the assignment of conjugate complex poles and is easy for use. The method transforms a constrained optimization Problem into an unconstrained one A numerical example is given also.