第6卷 第1期
1989年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 6, No. 1
Mar., 1989

二阶离散系统最优闭环极点配置

迟丽华　　　　姜遇姬

（天津财经学院基础部）　　（湘潭大学机械系）

摘　要

本文采用逆方法分析二阶离散系统最优闭环极点配置问题，只要所指定的闭环特征方程的系数满足文中推导出的条件式，就可以通过状态反馈法构成具有希望闭环极点配置的最优闭环系统，无需进一步验证其它最优条件。

一、引　言

近年来，离散系统具有希望闭环极点配置的最优闭环系统的设计问题已受到普遍关注。人们相继提出了一些设计方法。如挪威 Solheim 的逐次特征值移位法（1972），以色列 Bar-Ness 的直接法和相关矩阵法（1978），埃及 Amin 的改进 Solheim 法（1984）等。归纳起来，上述方法都是通过调整性能指标中的加权矩阵，使系统的闭环极点靠近指定值，这种方法的缺点是，在设计过程中，需多次解黎卡提方程，计算量大。本文采用与此相逆的方法，通过调整闭环极点的配置，以保证存在加权矩阵 Q、R 使二次型性能指标达极小，从而构成最优闭环系统。避免了求解非线性黎卡提方程的复杂性和选择加权矩阵的困难。

二、二阶系统配置最优闭环极点的条件

给定系统方程：

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \tag{1}$$

其中，（A，B）是能控标准型。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

通过控制律 $u(k)=-Lx(k)$ 使系统（1）和反馈阵 L 构成的闭环系统具有特征方程：

$$z^2+t_1z+t_2=0\quad (t_2\neq 0) \tag{2}$$

熟知，为保证有稳定的闭环极点，t_1、t_2 应满足：

$$|t_1|<2,\quad |t_1|-1<t_2<1 \tag{3}$$

即应在图1的三角形内取值。

为把闭环极点配置在希望值上，由状态反馈法，可得唯一状态反馈阵 L。熟知，对这样的 L 未必有矩阵 $Q\geqslant 0$，参数 $R>0$ 使性能指标 J 达极小。

本文于1988年3月16日收到。1988年8月15日收到修改稿。

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}[x(k)'Qx(k)+u(k)'Ru(k)] \qquad (4)$$

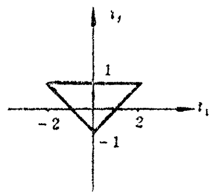

图 1　稳定闭环极点 t_1、t_2的取值区域

其中，$Q=\mathrm{diag}[q_1 \quad q_2]$。

我们来分析当系数 t_1、t_2 满足什么条件时，才能保证反馈阵 L 是最优反馈阵。即存在加权矩阵 $Q\geqslant0$，加权系数 $R>0$，使性能指标 J 达极小。

首先，利用哈密顿—雅可比方法求解系统（1）和性能指标（4）组成的线性二次最优控制问题，得到一个包含加权量 Q、R 在内的增广系统闭环特征方程式，记为 $T(z)=0$。然后，写出与指定闭环特征方程（2）相对应的增广系统闭环特征方程式，记为 $W(z)=0$。为了将极点配置方法和线性二次最优控制方法两者结合起来，令 $T(z)$和$W(z)$的对应项系数相等，从而建立起系数 t_1 和 t_2 与加权量 Q、R 之间的关系式。进一步分析所得关系式，有：

$$t_2=\frac{t_1}{a-t_1} \qquad (5.1)$$

$$\frac{a_2}{t_2}\left[t_1^2+\left(t_2-\frac{c}{2}\right)^2+1-\frac{c^2}{4}\right]\geqslant0 \qquad (5.2)$$

其中，　$a=\dfrac{a_1+a_1a_2}{a_2}$，$c=\dfrac{1+a_1^2+a_2^2}{a_2}$。

当系数 t_1、t_2 满足（3）式和（5）式时，通过状态反馈 $u(k)=-Lx(k)$，使系统（1）与 L 构成的闭环系统具有特征方程

$$z^2+t_1z+t_2=0 \qquad (t_2\neq0)$$

这时，反馈阵 L 是最优反馈阵。

若令 $R=1$，则相应加权矩阵 Q 的迹

$$\mathrm{tr}Q=\frac{a_2}{t_2}\left[t_1^2+\left(t_2-\frac{c}{2}\right)^2+1-\frac{c^2}{4}\right]$$

上式说明，同一个最优反馈阵 L，所对应的加权矩阵 Q 并不唯一，唯一不变的是加权矩阵 Q 的迹。

分析（5.1）式，它为一曲线，见图 2。分析（5.2）式，当$\dfrac{a_2}{t_2}>0$、$\dfrac{a_2}{t_2}<0$时，其分别表示以$\left(0,\dfrac{c}{2}\right)$为圆心，以$\sqrt{\dfrac{c^2}{4}-1}$ 为半径的圆外、圆内部分。可以证明 $\sqrt{\dfrac{c^2}{4}-1}$ 永远大于零。

因此，为简化计算，方便设计，设计者可以首先绘出（3）式和（5）式表示的图形，从图中确定参数 t_1、t_2 的取值范围，然后可在满足最优条件下，兼顾动态指标，选取最理想的参数 t_1、t_2，使系统既具有希望的动态指标，又具备最优性。

通过分析我们得出，为保证最优反馈阵的存在，应选取 t_2 与 a_2 同号，否则无解。

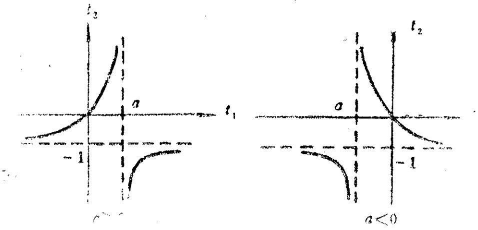

图 2　曲线 $t_2=\dfrac{t_1}{a-t_1}$

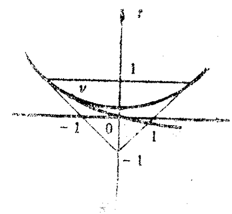

图 3　参数 t_2、t_1 取值范围

例 1　被控对象：

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(k)$$

取 $a_1=-1.6$，$a_2=0.6$。算得 $a=-4.27$，$c=6.53$。绘出（3）式和（5）式表示的图形，见图3。V 点坐标（-1.59，0.59）。当在曲线 $t_2=\dfrac{t_1}{a-t_1}$ 的 0—V 段上调整参数 t_1、t_2，使闭环极点靠近希望值，得到的状态反馈阵是最优反馈阵。

三、结　论

本文推导出的二阶系统具有希望闭环极点配置最优系统的逆设计方法，其最大特点是简便，计算量小，便于应用。当设计者按照文中要求去选择闭环特征方程的系数 t_1、t_2 时，就能够设计出具有希望闭环极点配置的最优闭环系统。

参 考 文 献

〔1〕 Solheim, O. A., Design of Optimal Control System with Prescribed Eigenvalues, INt. J. Control, 15:1, (1972), 143—160.

〔2〕 Bar-Ness, Y., Optimal Closed-loop Poles Assignment, INt. J. Control, 27:3, (1978), 321—430.

〔3〕 Amin, M. H., Optimal Discrete System with Prescribed Eigenvalues, INt. J. Control, 40:4, (1984), 783—794.

Discrete System Optimal Closed-loop Poles Assignment

Chi Lihua, Jiang Yuji

(Department of Mechanical Engineering, Hunan Xiangtan University)

Abstract

This paper deals with the assignment of optimal closed-loop poles for a second order discrete system. When the prescribed coefficients of the closed-loop characteristic equation satisfy the given formula, a optimal system with the prescribed closed-loop poles is obtained by the state feed-back.