第6卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.6, No. 2
1989年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1989

非部分嵌套信息结构的LQG动态队决策问题的可解性(Ⅰ)*

曾晓军　　郑应平

(厦门大学计算机与系统科学系)　　(中国科学院自动化研究所，北京)

摘　要

本文讨论非部分嵌套信息结构的LQG动态队决策问题，文中首先给出了最优策略存在的充分条件，并证明当这一条件成立时存在一个线性的最优策略并给出这一策略明显的表达式。其次通过引入"部分控制嵌入"的信息结构模式，证明了对具有"部分控制嵌入"信息结构的LQG动态队问题，上述充分条件同时也是必要的。当这一条件不成立时，给出了目标函数的下确界，这一下确界可用来作为选取ε次优策略的根据。

一、引　言

随机分散控制是分散控制最重要的方面之一，其中以何毓奇为代表的从动态队论角度对这一问题的研究[1-3]最为著名。在文〔2〕中，他们提出了一种重要的刻划信息结构的模式——部分嵌套信息结构，并解决了具有这种信息结构的LQG动态队问题。而对非部分嵌套信息结构的动态队问题则由于控制和信息的相互作用而产生的一系列困难使得这一问题成为随机分散控制中的一个著名的未解决的问题。自文〔3〕的工作以来，除几个例子[4][5]之外，这方面没有任何进展。一般说来，要完全解决非部分嵌套信息的动态队问题，即使简单的LQG情形，也是非常困难的。具体地讲，比如对Witsenhausen1968年给出的一个很简单的LQG情形的例子[6]，至今仍未找到最优策略。因此，通过对各种非部分嵌套信息结构模式下动态队问题的逐步解决，扩充可解问题的范围，最后达到问题较完满的解决可能是一条可行的路径。本文是沿着这个方向努力的结果，文中提出一种刻划非部分嵌套信息结构的信息模式——"部分控制嵌入"信息结构来研究LQG动态队问题的可解性，所得结果为相当一类非部分嵌套信息结构的动态队问题的求解提供了系统的方法和解答。

二、问题的叙述和预备知识

考虑如下动态队决策模型：

* 国家自然科学基金资助的课题。

本文于1987年6月15日收到。1988年4月9日收到修改稿。

A。决策者：设有 N 个决策者，决策者 DM_i 采用的控制 u_i 属于决策空间 $U_i = R^{m_i}$（$i=1, 2, \cdots, N$）；

B。目标函数：设决策者们共同的目标函数为

$$J = E\left(\frac{1}{2}u^{\tau}Qu + u^{\tau}S\xi + u^{\tau}C\right) \qquad (1)$$

其中，$u^{\tau} = (u_1, \cdots, u_N)$，$Q$、$S$为适当阶数的矩阵，$C$为向量且 $Q>0$。随机向量 $\xi \in R^p$定义在概率空间（Ω, $\mathbf{F}$, P）上且遵从Gaussian分布 $N(0, X)$，（$X>0$），它表示不确定因素。另外 τ 表示转置；

C。信息结构：设 DM_i 的信息为

$$z_i = H_i\xi + \sum_{j \propto i} D_{ij}u_j \qquad i=1, 2, \cdots, N \qquad (2)$$

这里，$j\propto i$ 表示 DM_j 先于 DM_i 行动，也称 j 先于 i。也即由于因果性要求，当 DM_j 后于 DM_i 行动时，u_j 不出现在 DM_i 的信息 z_i 中。此外设 $z_i \in R^{n_i}$，H_i，D_{ij} 是适当阶数的矩阵；

D。容许策略空间：设 DM_i 的容许策略空间为

$$\Gamma_i = \{\gamma_i(z_i) \mid \gamma_i \text{是} R^{n_i} \to R^{m_i} \text{的Borel可测函数}\} \qquad i=1, 2, \cdots, N \qquad (3)$$

$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \cdots \times \Gamma_N$ 称为该队的容许策略空间。

对上述决策模型，动态队问题可叙述如下：

找策略$(\gamma_1^*, \cdots, \gamma_N^*) \in \Gamma$ 使得目标函数 $J(\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$ 达到极小。当这样的策略（$\gamma_1^*, \cdots, \gamma_N^*$）存在时，称其为最优策略。

定义 1 信息结构(2)称为是部分嵌套[1,2]的，如果对任意 i, j 和 $\gamma \in \Gamma$，当 $j \propto i$ 且 $D_{ij} \neq 0$ 时，有 $Z_j \subset Z_i$。这里 $Z_k = \sigma(z_k)$，$\sigma(z_k)$ 表示由随机向量 z_k 所张成的 σ－域。

引理 1 [2]若信息结构(2)是部分嵌套的，则最优策略存在且可表为

$$u_i = \gamma_i^*(z_i) = A_i z_i + b_i, \quad i=1, 2, \cdots, N \qquad (4)$$

这里，A_i，b_i 是适当的矩阵和向量。

引理 2 最优策略（4）的轨迹 $u_i^*(\xi)$ 和相应的信息轨迹 $z_i^*(\xi)$（$i=1,2,\cdots,N$）为

$$u_i^*(\xi) = L_i^*\xi + b_i^* \qquad (5)$$

$$z_i^*(\xi) = H_i^*\xi + a_i^* \qquad (6)$$

其中，当 $i \in N_1 = \{i \mid z_i = H_i\xi\}$（称为第一先行组）时，

$$H_i^* = H_i, \quad L_i^* = A_i H_i^*, \quad a_i^* = 0, \quad b_i^* = b_i$$

当 $i \in N_k = \{ i \mid z_i = H_i\xi + \sum_{j \in N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1}} D_{ij}u_j\}$（称为第$k$先行组）时，

$$H_i^* = H_i + \sum_{j\in N_1\cup\cdots\cup N_{k-1}} D_{ij}L_j^*, \quad L_i^* = A_i H_i^*$$

$$a_i^* = \sum_{j\in N_1\cup\cdots\cup N_{k-1}} D_{ij}b_j^*, \quad b_i^* = A_i a_i^* + b_i, \quad k=2, 3, \cdots, t$$

证 当$i\in N_1=\{i|z_i=H_i\xi\}$时,

$$z_i^*(\xi)=z_i=H_i\xi\triangleq H_i^*\xi$$

$$u_i^*(\xi)=\gamma_i^*[z_i^*(\xi)]=A_iz_i^*(\xi)+b_i=A_iH_i^*\xi+b_i$$

$$\triangleq L_i^*\xi+b_i^*$$

当$i\in N_2=\{i|z_i=H_i\xi+\sum_{i\in N_1} D_{ij}u_j\}$时,

$$z_i^*(\xi)=H_i\xi+\sum_{j\in N_1} D_{ij}u_j^*(\xi)=H_i\xi+\sum_{j\in N_1} D_{ij}(L_j^*\xi+b_j^*)$$

$$=(H_i+\sum_{j\in N_1} D_{ij}L_j^*)\xi+\sum_{j\in N_1} D_{ij}b_j^*\triangleq H_i^*\xi+a_i^*$$

$$u_i^*(\xi)=\gamma_i^*[z_i^*(\xi)]=A_iz_i^*(\xi)+b_i=A_iH_i^*\xi+(A_ia_i^*+b_i)$$

$$\triangleq L_i^*\xi+b_i^*$$

类似推导用数学归纳法可立得结论。

一般地说,若$u_i=\gamma_i(z_i)$是一个容许策略,则其轨迹和相应的信息轨迹分别记为$u_i(\xi)$和$z_i(\xi)$($i=1, 2, \cdots, N$),它们的表达式可按引理2证明的步骤算出。

引理 3 若信息结构(2)是部分嵌套的,则最优策略的轨迹是唯一的(在几乎处处相等意义下)。

证 由文[2]结论知:部分嵌套信息结构等价于一个静态信息结构,从而具有部分嵌套信息结构的动态队问题对应着一个以其等价的静态信息结构为信息结构的静态队问题。于是最优策略的轨迹即与其相应的静态队问题的最优策略相对应,这样由静态队问题最优策略的唯一性[2]即得结论。

一般说来,一个动态队问题的最优策略的表示不必是唯一的[7],但引理3则说明这些不同表示的最优策略的轨迹是唯一的。

三、主要结果

本节始终假设信息结构(2)是非部分嵌套的,则推理的第一步是将信息结构(2)部分嵌套化,其步骤如下*:

* 这里所给出的是一种一般化的嵌套化方法,对具体问题的嵌套化方法常可以是更简单的。这一节的结果对任意方法进行嵌套化所得到部分嵌套信息结构$\{\hat{z}_i; i=1, 2, \cdots, N\}$来代替(7.1)、(7.2)式都仍是成立的。

对第一先行组，即$i\in N_1=\{\,i\,|z_i=H_i\xi\}$，令

$$\hat{z}_i=z_i \tag{7.1}$$

对第k先行组，即$i\in N_k=\{\,i\,|\,z_i=H_i\xi+\sum_{j\in N_1\cup\cdots\cup N_{k-1}}D_{ij}u_j\,\}$，令

$$\hat{z}_i=\begin{pmatrix} z_i & \\ \hat{z}_j & j\in N_1\cup\cdots\cup N_{k-1}\text{且}D_{ij}\neq 0\end{pmatrix},\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ t \tag{7.2}$$

容易验证信息结构$\{\hat{z}_i\}$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$部分嵌套的，于是根据引理1，以$\{\hat{z}_i\}i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$为信息结构的动态队问题是可解的，其最优策略设为

$$u_i=\hat{\gamma}_i^*(\hat{z}_i)=\hat{A}_i\hat{z}_i+\hat{b}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{8}$$

且记其相应的目标函数值为J_{PN}^*。利用引理2可算出最优策略（8）的轨迹$\hat{u}_i^*(\xi)$和相应的信息轨迹$\hat{z}_i^*(\xi)$为

$$\hat{u}_i^*(\xi)=\hat{L}_i^*\xi+\hat{b}_i^* \tag{9}$$

$$\hat{z}_i^*(\xi)=\hat{H}_i^*\xi+\hat{a}_i^*,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{10}$$

其中，$\hat{L}_i^*$，$\hat{b}_i^*$，$\hat{H}_i^*$，$\hat{a}_i^*$，（$i=1,\ 2,\ \cdots N$）的计算公式可由引理2给出。

当　$i\in N_1$　时，记$H_i^*=H_i$，　$a_i^*=0$

当　$i\in N_k$（$k=2,\ 3,\ \cdots,\ t$）时，记　$H_i^*=H_i+\sum_{j\propto i}D_{ij}\hat{L}_i^*$，　$a_i^*=\sum_{j\propto i}D_{ij}\hat{b}_j^*$

定理 1　对以(1)为目标函数，以（2）为信息结构且信息结构是非部分嵌套的LQG动态队问题，若存在（$K_1,\ \cdots,\ K_N$）使得

$$\hat{L}_i^*=K_iH_i^*,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{11}$$

成立，则最优策略存在且可表为

$$u_i=\gamma_i^*(z_i)=K_iz_i+(\hat{b}_i^*-K_i\hat{a}_i^*),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{12}$$

而最优目标函数值等于J_{PN}^*，也即$\min\limits_{\gamma\in\Gamma}J(\gamma)=J_{PN}^*$。

证　如果策略（8）的轨迹$\hat{u}_i^*(\xi)$和策略（12）的轨迹$u_i^*(\xi)$相等，则有

$$J(\hat{\gamma}_1^*,\ \cdots,\ \hat{\gamma}_N^*)=E\Big[\frac{1}{2}\hat{u}^{*\tau}(\xi)Q\hat{u}^*(\xi)+\hat{u}^{*\tau}(\xi)S\xi+\hat{u}^{*\tau}(\xi)C\Big]$$

$$=E\left[\frac{1}{2}u^{*\tau}(\xi)Qu^*(\xi)+u^{*\tau}(\xi)S\xi+u^{*\tau}(\xi)C\right]=J(\gamma_1^*,\cdots,\ \gamma_N^*)$$

再由文〔1〕的性质4知

$$J(\hat{\gamma}_1^*, \cdots, \hat{\gamma}_N^*) = J_{PN}^* \leqslant J(\gamma_1, \cdots, \gamma_N)\text{，对任意}(\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \in \Gamma\text{成立。}$$

于是即有策略（12）是最优策略。故为证定理，只需证 $\hat{u}_i^*(\xi) = u_i^*(\xi)$，对任意 $\xi \in R^p$ 成立 $(i=1, 2, \cdots, N)$，其证明如下：

对 $i \in N_1 = \{i | z_i = H_i \xi\}$

$\because$ $\hat{H}_i^* = H_i^* = H_i$，$\hat{b}_i = \hat{b}_i^*$，$\hat{a}_i^* = 0$，$a_i^* = 0$

$$\therefore \quad \hat{u}_i^*(\xi) = \hat{A}_i \hat{z}_i^*(\xi) + \hat{b}_i = \hat{A}_i \hat{H}_i^* \xi + \hat{b}_i^* = \hat{L}_i^* \xi + \hat{b}_i^*$$

$$= K_i H_i^* \xi + \hat{b}_i^* = K_i z_i^*(\xi) + \hat{b}_i^* = u_i^*(\xi)\text{，对任意 }\xi \in R^p\text{ 成立。}$$

假设对 $i \in N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1}$ 都有 $\hat{u}_i^*(\xi) = u^*(\xi)$，对任意 $\xi \in R^p$ 成立。

于是对 $i \in N_k$，策略（12）相应的信息轨迹

$$z_i^*(\xi) = H_i \xi + \sum_{j \propto i} D_{ij} u_j^*(\xi) = H_i \xi + \sum_{j \propto i} D_{ij} \hat{u}_j^*(\xi) = H_i^* \xi + a_i^* \tag{13}$$

故有

$$u_i^*(\xi) = K_i z_i^*(\xi) + (\hat{b}_i^* - K_i a_i^*) = K_i H_i^* \xi + \hat{b}_i^* \tag{14}$$

注意到条件（11）比较（9）与（14）式即得：$u_i^*(\xi) = \hat{u}_i^*(\xi)$，对任意 $\xi \in R^p$ 成立。这样由数学归纳法证得结论。

定理1给出了最优策略存在的充分条件，下面引入“部分控制嵌入”信息结构并证明这类非部分嵌套信息结构的动态队问题的可解性。这一结果也可使我们对定理1的适用范围有一个更深刻的认识。

定义 2 信息结构（2）称为是“部分控制嵌入”的，如果对任意 $j \propto i$ 且 $D_{ij} \neq 0$，总存在矩阵 $E_{ij} \neq 0$，使得

$$E_{ij} u_j = h_{ij}(z_i) \tag{15}$$

这里 h_{ij} 是一个 Borel 可测函数。也即决策者 DM_i 可从自己的信息中获得 DM_j 的部分控制信息。

说明 1 具有性质（15）的信息结构称为“部分控制嵌入”是因为先行动的决策者 DM_j 的部分控制 $E_{ij} u_j$ 嵌入于后行动决策者 DM_i 的信息 z_i 中。这里部分还有另外一重意思是只满足 $D_{ij} \neq 0$ 的那部分决策者的控制和信息之间有这种部分控制嵌入关系。

说明 2 “部分控制嵌入”信息结构的特征是：当 DM_j 的控制影响 DM_i 的信息时，DM_i 可精确地观测到 DM_j 的部分控制 $E_{ij} u_j$（不变随机干扰的影响），因此 DM_i 可以从 $E_{ij} u_j = E_{ij} \gamma_j(z_j)$ 中获得 z_j 的部分信息来进行决策。换句话说，即 DM_j 可以通过 $\gamma_j(z_j)$ 的传讯(signaling)作用来传递信息以达到优化系统目标函数的目的。

定理 2 若信息结构（2）是“部分控制嵌入”的，则

$$\inf_{(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)\in\Gamma} J[\gamma_1(z_1),\ \cdots,\ \gamma_N(z_N)] = J^*_{PN} \tag{16}$$

证　见附录。

定理2成立的根本原因是在传讯通道 $E_{ij}u_j$ 无干扰噪声的情形下，DM_j 可选取控制 $\gamma_j(z_j)$ 使其即任意逼近 $\hat{\gamma}^*_j(\hat{z}_j)$ 且又可通过无噪声传讯通道 $E_{ij}\gamma_j(z_j)$ 把 z_j 任意精度的近似信息传讯给后续决策者 DM_i 以用于决策。但是当传讯通道有噪声干扰时，这一性质就遭到破坏[8]。然而在实际问题中，传讯通道经常是受到干扰噪声影响的，因此这一定理是在传迅通道无干噪声的理想情形下的理论结果。当传迅通道有干扰噪声时，这一定理的意义是为根据干扰噪声的能量大小选取次优解提供了一个参照量。

定理3　若信息结构（2）是“部分控制嵌入”的，则最优策略存在的充要条件是方程组（11）有解（K_1，$\cdots$，K_N）。

证　由定理1，只需证必要性。

设$(\gamma^*_1,\ \cdots,\ \gamma^*_N)$是最优策略，于是由定理2有

$$J(\gamma^*_1,\ \cdots,\ \gamma^*_N) = \min_{(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)\in\Gamma} J(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_N) = J^*_{PN}$$

故$(\gamma^*_1,\ \cdots,\ \gamma^*_N)$也是以（7.1）、（7.2）为信息结构的动态队问题的最优策略，于是由引理3可得$(\gamma^*_1,\ \cdots,\ \gamma^*_N)$的轨迹$(u^*_1(\xi),\ \cdots,\ u^*_N(\xi))$满足

$$u^*_i(\xi) = \hat{u}^*_i(\xi) = \hat{L}^*_i\xi + \hat{b}^*_i,\quad i=1,\ 2,\cdots,N \qquad \text{a.s.}$$

于是其相应的信息轨迹为（见（13）式）

$$z^*_i(\xi) = H^*_i\xi + a^*_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \qquad \text{a.s.}$$

$$\because\quad \hat{L}^*_i\xi = E\left[\hat{L}^*_i\xi \,\middle|\, \sigma[u^*_i(\xi)]\right] = E\left[\hat{L}^*_i\xi \,\middle|\, \sigma(\gamma^*_i(z^*_i(\xi)))\right]$$

$$= E\left[\hat{L}^*_i\xi \,\middle|\, \sigma(z^*_i(\xi))\right] = E\left[\hat{L}^*_i\xi \,\middle|\, H^*_i\xi\right] = K_iH_i\xi \qquad \text{a.s.}$$

注意到$\xi\sim N(0,\ X)$且$X>0$，所以由上式得

$$\hat{L}^*_i = K_iH^*_i,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

当信息结构（2）是“部分控制嵌入”时，由定理1和定理3知，当方程组（11）有解时，最优策略存在且可有线性表示式（12）。当方程组（11）无解时，最优策略不存在，但由定理2知目标函数的下确界等于J^*_{PN}，从而可根据这一下确界来选取ε次优策略。关于这些结果的一些简单应用例子可见[7]。

四、结 束 语

本文讨论非部分嵌套信息的动态队问题。文中首先给出了最优策略存在的一个充分

条件，这一结果与文〔3〕结果相比条件简单易于验证且适用范围广，特别是证明了最优策略有线性形式。其次提出了“部分控制嵌入”的信息结构模式，给出了这类非嵌套信息结构的动态队问题最优策略存在的充要条件和表达式以及最优策略不存在时目标函数的下确界。这些结果使我们对相当一类非嵌套信息结构的动态队问题的可解性有了清楚的认识，为求解这类问题提供了系统的方法。

附　录

以下给出定理2证明的主要步骤。

引理 A.1 若 U_i ($i=1, 2, \cdots$) 是 R^m 中一列内点非空的 Borel 可测集，E_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 是 $k_j\times m$ 的非零矩阵，则存在 $\gamma_i\in U_i$ ($i=1, 2, \cdots$) 使得对任意 $i\neq i'$ 有

$$E_j\gamma_i\neq E_j\gamma_{i'}, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

引理 A.2 若 $\gamma^*(z)=A_0z+b_0$ 是定义于 $Z=R^q$ 取值于 $U=R^m$ 的线性函数，E_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 是 $k_j\times m$ 的非零矩阵，则对任意 $\varepsilon>0$，存在Borel 可测函数 $\gamma: Z\to U$ 和 η_j: $V_j(=R^{k_j})\to Z$ 使得对任意 $z\in Z$ 有

$$\|\gamma(z)-\gamma^*(z)\|<\varepsilon \tag{A.1}$$

$$\|\eta_j[E_j\gamma(z)]-z\|<\varepsilon, \quad j=1, 2, \cdots n, \tag{A.2}$$

证　首先把Z分割成两两不交、直径小于 δ 的可列个 Borel 可测集 Z_i ($i=1, 2, \cdots$) 之并。

其次对U进行适当的分割使得U为两两不交、直径小于 δ' 的可列个 Borel 可测集 U_l ($l=1, 2, \cdots$) 之并且每个 U_l 分割成可列个两两不交内点非空的Borel 可测集 U_{li} ($i=1, 2, \cdots$) 之并。

在每个Z_i ($i=1, 2, \cdots$) 中取 $z_i\in Z_i$，若 $\gamma^*(z_i)\in U_l$，取 $\gamma_i^*\in U_{li}\subset U_l$，于是有 $\|\gamma_i^*-\gamma^*(z_i)\|<\delta'$，记 $U_i^*=U_{li}$。此步骤逐次进行即得一串内点非空的 Borel 可测集 U_i^* ($i=1, 2, \cdots$)。由引理A.1知存在 $\gamma_i\in U_i^*$ ($i=1,2,\cdots$) 使得 $i\neq i'$ 时有 $E_j\gamma_i\neq E_j\gamma_{i'}$ ($j=1, 2, \cdots n$)。据此定义 γ、η_i 如下：

$$\gamma(z)=\gamma_i, \text{ 当 } z\in Z_i \text{ 时}, \quad \eta_j(v_j)=\begin{cases} z_i & \text{当 } v_j=E_j\gamma_i \text{ 时}, \quad i=1, 2, \cdots \\ z_0 & \text{当 } v_j\notin\{E_j\gamma_i \mid i=1, 2, \cdots\} \end{cases}$$

其中，$z_0\in Z$ 且 $z_0\notin\{z_i \mid i=1, 2, \cdots\}$。由上述定义显然 $\gamma(z)$ 和 $\eta_j(v_j)$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 是 Borel 可测且对 $z\in Z_i$ ($i=1, 2, \cdots$) 有

$$\|\gamma(z)-\gamma^*(z)\|=\|\gamma_i-\gamma^*(z)\leqslant\|\gamma_i-\gamma_i^*\|+\|\gamma_i^*-\gamma^*(z_i)\|+\|\gamma^*(z_i)-\gamma^*(z)\|$$

$$\leqslant\delta'+\delta'+\|A_0\|\,\|z_i-z\|\leqslant 2\delta'+\|A_0\|\delta \tag{A.3}$$

$$\|\eta_j[E_j\gamma(z)]-z\|=\|\eta_j(E_j\gamma_i)-z\|=\|z_i-z\|<\delta \tag{A.4}$$

在 (A.3)、(A.4) 中取 $0<\delta'<\varepsilon/3$，$0<\delta<\min\{\varepsilon, \varepsilon/3\|A_0\|\}$ 即得结论。

利用引理A.2不难证明如下引理。

引理 A.3 设$Y=R^p$、$Z=R^q$、$U=R^m$、$V_j=R^{k_j}$ ($j=1, 2, \cdots, n$) E_j ($j=1,2,\cdots, n$) 是 $k_j\times m$ 的非零矩阵，$\gamma^*(z)=A_0z+b_0$ 是$Z\to U$ 的线性函数，则当定义于 $\overline{Y}$ 取值于 Z 的两个Borel 可测函数 $g(\xi)$ 和 $z^*(\xi)$ 满足

$$\| g(\xi) - z^*(\xi) \| < \varepsilon, \text{ 任意 } \xi \in Y \tag{A.5}$$

时，存在Borel可测函数γ：$Z \to U$和η_j：$V_j \to Z$使得对任意$\xi \in Y$有

$$\| \gamma[g(\xi)] - \gamma^*[z^*(\xi)] \| < (1 + \| A_0 \|) \varepsilon \tag{A.6}$$

$$\| \eta_j[E_j \gamma(g(\xi))] - z^*(\xi) \| < 2\varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{A.7}$$

引理 A.4 若信息结构（2）是“部分控制嵌入”的，$\{ \hat{\gamma}_i^*(\hat{z}_i) = \hat{A}_i \hat{z}_i + \hat{b}_i, i = 1, 2, \cdots, N \}$是以（7.1）、（7.2）为信息结构的动态队问题的最优策略，则对任意$\varepsilon > 0$，存在$\{ \gamma_i^\varepsilon(z_i) \in \Gamma_i, i = 1, 2, \cdots, N \}$使得对任意$\xi \in R^p$有

$$\| u_i^\varepsilon(\xi) - \hat{u}_i^*(\xi) \| < K\varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

这里，$u_i^\varepsilon(\xi)$和$\hat{u}_i^*(\xi)$（$i = 1, 2, \cdots, N$）分别是策略$\{ \gamma_i^\varepsilon(z_i), i = 1, 2, \cdots, N \}$和$\{ \hat{\gamma}_i^*(\hat{z}_i), i = 1, 2, \cdots, N \}$的轨迹，$K$是一固定正数。

证　假设对$i \in N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1}$存在Borel可测函数$\gamma_i^\varepsilon$和$\eta_{li}$使得

$$\| \gamma_i^\varepsilon[z_i^\varepsilon(\xi)] - \hat{\gamma}_i^*[\hat{z}_i^*(\xi)] \| < K_i \varepsilon, \quad \xi \in R^p \tag{A.8}$$

$$\| \eta_{li}[E_{li} \gamma_i^\varepsilon(\hat{z}_i^\varepsilon(\xi))] - \hat{z}_i^*(\xi) \| < 2 m_i \varepsilon, \quad \xi \in R^p \tag{A.9}$$

这里，$l \propto i$且$D_{li} \neq 0$，$z_i^\varepsilon(\xi) = H_i \xi + \sum_{j \propto i} D_{ij} \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)]$

现在要证对$i \in N_k$也有上述结果，为此记

$$g_i^\varepsilon(z_z) = \begin{pmatrix} z_i \\ \eta_{ij}[h_{ij}(z_i)], \text{ 当 } j \in N_1 \cup \cdots \cup N_{k-1} \text{ 且 } D_{ij} \neq 0 \text{ 时} \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

$$z_i^\varepsilon(\xi) = H_i \xi + \sum_{j \propto i} D_{ij} \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)] = H\xi + \sum_{j \in N_1 \cdots \cup N_{k-1}} D_{ij} \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)] \tag{A.11}$$

$$g_i(\xi) = g_i^\varepsilon[z_i^\varepsilon(\xi)] \tag{A.12}$$

注意到$h_{ij}[z_i^\varepsilon(\xi)] = E_{ij} \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)]$和利用（A.8）、（A.9）可得

$$\begin{aligned} \| g_i(\xi) - \hat{z}_i^*(\xi) \| &< \sum_{\substack{j \propto i \\ D_{ij} \neq 0}} \| D_{ij} \{ \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)] - \hat{\gamma}_j^*[\hat{z}_j^*(\xi)] \} \| + \| \eta_{ij}[h_{ij}(z_i^\varepsilon(\xi))] \\ &- \hat{z}_j^*(\xi) \| \leqslant \sum_{\substack{j \propto i \\ D_{ij} \neq 0}} \{ \| D_{ij} \| \| \gamma_j^\varepsilon[z_j^\varepsilon(\xi)] - \hat{\gamma}_j^*[\hat{z}_j^*(\xi)] \| + \| \eta_{ij}[E_{ij}(\gamma_j^\varepsilon(z_j^\varepsilon(\xi))] \\ &- \hat{z}_j^*(\xi) \| \\ &= \sum_{\substack{j \propto i \\ D_{ij} \neq 0}} (\| D_{ij} \| K_j + 2m_j) \varepsilon \triangleq m_i \varepsilon, \qquad \xi \in R^p \end{aligned}$$

于是由引理A.3知存在Borel可测函数γ_i、η_l使得

$$\| \gamma_i[g_i^\varepsilon(z_i^\varepsilon(\xi))] - \hat{\gamma}_i^*[\hat{z}_i^*(\xi)] \| < (1 + \| \hat{A}_i \|) m_i \varepsilon \triangleq K_i \varepsilon, \quad \xi \in R^p \tag{A.13}$$

$$\| \eta_{li}[E_{li} \gamma_i(g_i^\varepsilon(z_i^\varepsilon(\xi)))] - \hat{z}_i^*(\xi) \| < 2 m_i \varepsilon, \quad \xi \in R^p \tag{A.14}$$

这里$i \propto l$且$D_{li} \neq 0$。

定义　$\gamma_i^\varepsilon(z_i) = \gamma_i[g_i^\varepsilon(z_i)] \in \Gamma_i$及由（A.13）、（A.14）即得所证。

再注意到$u_i^{\varepsilon}(\xi)=\gamma_i^{\varepsilon}[z_i^{\varepsilon}(\xi)]$，$\hat{u}_i^*(\xi)=\hat{\gamma}_i^*[\hat{z}_i^*(\xi)]$和(A.8)对$i=1,2,\cdots,N$皆成立只知需取$K=\underset{1\leq i\leq N}{\mathrm{mat}}\{K_i\}$即得结论。

定理2证明。由引理A.4立即有

$$|J[\gamma_1^{\varepsilon}(z_1),\cdots,\gamma_N^{\varepsilon}(z_N)]-J[\hat{\gamma}_1^*(\hat{z}_1),\cdots,\hat{\gamma}_N^*(\hat{z}_N)]|$$
$$=|J[u_1^{\varepsilon}(\xi),\cdots,u_N^{\varepsilon}(\xi)]-J[\hat{u}_1^*(\xi),\cdots,\hat{u}_N^*(\xi)]\to 0,\ 当\varepsilon\to 0时。$$

参考文献

[1] Ho,Y.C., Team Decision Theory and Information Structure, Proceedings of the IEEE, 68:6, (1980), 644—654.

[2] Ho,Y.C.,and Chu,K.C., Team Decision Theory and Information Structure in Optimal Control Problems——Part I, IEEE Trans. Automatic Control, AC-17:1, (1972), 15—22.

[3] Chu, K.C., Team Decision Theory and Information Structure in Optimal Control Problems——Part II, IEEE Trans. Automatic Control, AC-17:1, (1972), 22—28.

[4] Ho,Y.C., Kastner,M.P., and Wong, E., Teams, Signaling, and Information Theory, IEEE. Trans. Automatic Control, AC-23:2, (1978), 305—311.

[5] Chang, T.S., and Ho, Y.C., A Bound for a Class of Non-nested LQG Team Problems,Automtica, 22:3, (1976), 377—379.

[6] Witsenhausen, H.S., A Counterexample in Stochastic Optimal Control, SIAM J.Control,6:1, (1968), 131—147.

[7] Zeng X.J., and Zheng, Y.P., On Hierarchical Team Problems with Nonnested Information Structure, 待发表.

[8] Bismut, J.M., An Example of Interaction Between Information and Control, the Transparency of a Game, IEEE Trans. Automatical Control, AC-18:5,(1973),(518—522).

The Solvability of Dynamic LQG Team Decision Problems with Nonnested Information Structure (I)

Zeng Xiaojun

(Department of Computer and System Science, Xiamen University, Xiamen)

Zheng Yingping

(Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper discusses the dynamic LQG team problems with nonnested information structure. at first, a sufficient condition for the existence of optimal strategy is given, and when this condition is satisfied , it is shown that there exists a linear optimal strategy and the explicit expression of this optimal strategy is obtained. Next, by introducing "Partial control nested" information structure, it is proved that the above sufficient condition is also necessary for the dynamic LQG team problems with "partial control nested" information structure. When this condition is not valid, the tight lower bound of the objective function is given, whichcan be used to choose ε-suboptimal strategies.