第6卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.6, No.2
1989年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1989

线性控制系统由状态反馈实现抗干扰的条件

张　瑜　　　　韩京清

（上海科技大学管理学院）（中国科学院系统科学研究所，北京）

摘　要

本文用传递函数矩阵的方法对线性定常系统中的干扰解耦问题（D.D.P.）进行了研究，当输入个数m=输出个数p时，给出了系统由状态反馈实现抗干扰的充要条件，对$p<m$文章也进行了讨论.所得结果简洁直观.文章还给出了一种计算反馈阵K的算法，这算法容易在计算机上实现.

一、引　言

当一个系统受外干扰作用时，是否存在状态反馈使闭环系统的输出不受外干扰影响呢？Wonham在〔1〕中把它称为干扰解耦问题(D.D.P.)，并用几何方法给出了有解的充要条件，〔4〕中用矩阵的初等变换的方法给出了判别条件及算法，本文则是从频域角度出发讨论D.D.P.有解的充分及必要条件及反馈阵K的算法。

二、问题的提出及其转换

设有受干扰作用的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$x\in R^n$，$y\in R^p$，$u\in R^m$，$f\in R^q$分别代表系统的状态、输出、控制和干扰向量，$\mathrm{rank}B=m$，$\mathrm{rank}C=p$。

又设(A,B)能控，能控指数为ν，且$p\leqslant m$。对系统（1.1）作状态反馈

$$u = -Kx + v \tag{1.2}$$

得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (A-BK)x + Bv + Df \\ y = Cx \end{cases} \tag{1.3}$$

本文于1988年1月27日收到，1988年12月28日收到修改稿。

我们的问题是：讨论系统（1.1）存在状态反馈（1.2），使闭环（1.3）的输出不受干扰影响的条件，并求出相应的反馈阵 K。

〔3〕把输出不受外干扰影响的能力叫系统的能抗干扰性，因此这里讨论的是用状态反馈使闭环系统具有抗干扰能力的问题。根据〔1〕的结果，问题有解的充要条件是：存在 K 使

$$C[D,(A-BK)D,\cdots,(A-BK)^{n-1}D]=0$$

即

$$G_K(s)\triangleq C(sI-A+BK)^{-1}D=0^* \qquad (1.4)$$

记（1.1）的控制传递阵和干扰传递阵分别为

$$G_1(s)=C(sI-A)^{-1}B, \qquad G_2(s)=C(sI-A)^{-1}D$$

命题 1.1　$G_K(s)$、$G_1(s)$、$G_2(s)$之间存在如下关系：

$$G_K(s)=-G_1(s)\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D+G_2(s) \qquad (1.5)$$

证　设

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -K & I \end{bmatrix}$$

则

$$I=\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -K & I \end{bmatrix} \quad 及 \quad I=\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -K & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix}$$

从上述两等式可分别求出 Y_1 为

$$Y_1=-(sI-A+BK)^{-1}B \qquad 及 \qquad Y_1=-(sI-A)^{-1}B\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}$$

故得

$$G_1(s)\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}=C(sI-A+BK)^{-1}B \qquad (1.6)$$

又

$$\begin{aligned} G_K(s)&=C(sI-A+BK)^{-1}(sI-A)(sI-A)^{-1}D \\ &=C(sI-A+BK)^{-1}[(sI-A+BK)-BK](sI-A)^{-1}D \\ &\overset{(1.6)}{=} -G_1(s)\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K(sI-A)^{-1}D+G_2(s) \end{aligned}$$

因此干扰解耦问题有解的充要条件是存在 K，满足

$$-G_1(s)[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D+G_2(s)=0 \qquad (1.7)$$

三、当 p=m 时系统由状态反馈实现抗干扰的充要条件

先设(A,B)具有下列积分器串联形式（见〔5〕）：

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{n_\nu} & \overbrace{[I_\nu\ 0]}^{n_{\nu-1}} & & \overbrace{0}^{n_1} \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & & [I_2\ 0] \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \}n_\nu \\ \\ \}n_2 \\ \}n_1=m \end{array} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_1 \end{pmatrix}\}m$$

其中，$\det B_1\neq 0$。直到定理2.2前，（A,B）均指上述形式。

引理 2.1　$(sI-A)^{-1}=(A^{\nu-1}+A^{\nu-2}s+\cdots+As^{\nu-2}+Is^{\nu-1})/s^\nu$

---

*直接解这个有关 K 的方程是相当困难的。$G_K(s)$是闭环的干扰传递阵。

证　由 $A^{\nu}=0$ 即可证明（详略）。

为了证明定理2.1，先讨论多项式矩阵的系数阵以及有关系数阵变换的内容。

定义 2.1　设 $A(s)$ 为 $m\times n$ 多项式矩阵，且 $A(s)=A_{\nu-1}+A_{\nu-2}s+\cdots+A_0s^{\nu-1}$，其中，$A_0,\cdots,A_{\nu-1}$ 为常数阵，则称 $Q\triangleq[A_{\nu-1},\cdots,A_0]$ 为 $A(s)$ 的系数阵。

定义 2.2　多项式矩阵的系数阵的三种变换为：（1）互换 Q 的第 i、j 行。（2）Q 的第 j 行乘数 α 加到第 i 行上去。（3）若 A_0 的第 i 行为零，则可把 Q 的第 i 行右移一块，然后把第一块空白的那行补零。

引理 2.2　设系数阵 Q 经一次上述变换变为 Q'，它们对应的多项式阵分别为 $A(s)$ 和 $A'(s)$，则存在满秩方阵 $V(s)$，使 $A'(s)=V(s)\cdot A(s)$。

引理 2.3　若 $Q=[FG^{\nu-1}H,\ FG^{\nu-2}H,\cdots,FGH,FH]$，其中，$F\in R^{p\times n}$，$G\in R^{n\times n}$，$H\in R^{n\times m}$，又设 $G^{\nu}=0$，用 Q' 表示 Q 经一次变换所得阵，则存在 $\widetilde{F}\in R^{p\times n}$，使

$$Q'=[A'_{\nu-1},\cdots,A'_0]=[\widetilde{F}G^{\nu-1}H,\widetilde{F}G^{\nu-2}H,\cdots,\widetilde{F}GH,\widetilde{F}H]$$

引理2.2和2.3的证明是容易的，从略。

引理 2.4　设 $A(s)$ 为 $p\times p$ 的多项式阵，$\det A(s)\neq0$，对应的系数阵为 $Q=[A_{\nu-1},\cdots,A_1,A_0]$ 则对 Q 进行有限次定义2.2中变换，可将最后一块变为满秩方阵。

具体的化法可按如下步骤：

（1）Q 的各行右边记零。

（2）若 Q 的末块满秩，则完成。

（3）若 Q 的末块的第 i 行为零，则对 Q 的第 i 行用第三种变换，并把第 i 行右边的所附数加上1。如果所得系数阵 Q' 的末块满秩，则化法完成，否则转(4)。

（4）对 Q'（连同右边的所附数）进行行调换，使小数对应的行在上，大的所附数对应的行在下。

（5）用系数阵下面的行消去系数阵末块的某行，转(3)。

现说明当 $\det A(s)\neq0$ 时，Q 经有限次变换后，可将最后一块变为满秩方阵。

首先说明步骤(5)的要求是办得到的。易见执行(5)的条件是系数阵末块无零行且末块行列式为零，这时用线性代数知识知，末块中必有某一行为其下面行的线性组合。

再讨论系数阵右边数意义。只有当执行(3)时，右边的数才加1，可见右边所附数是记录了由于进行变换(3)而补上的零块数。由于步骤(4)，故在执行步骤(5)时，不会破坏那些被记录过的补上的零块。

如果系数阵按上述化法一直不出现末块满秩的情况，则步骤(3)、(4)、(5)可一直进行下去，总会出现某一行所有元素全为零，这时对应的多项式阵的某行全为零，由引理2.2知，$A(s)$ 也降秩，与引理2.4的假设矛盾。

为了方便，记 $Q^{(i)}=[A^{(i)}_{\nu-1},\ A^{(i)}_{\nu-2},\cdots,\ A^{(i)}_0]$ 为 Q 经第 i 次变换所得阵。

引理 2.5　记 $W(s)$ 为严格真有理分式阵，其任一左分解为 $W(s)_{r\times m}=A^{-1}(s)_{r\times r}\cdot B(s)_{r\times m}$，则 $\partial_{h_i}A(s)>\partial_{h_i}B(s)$，这里记号 ∂_{h_i} 表示多项式阵第 i 行的行次。（$i=1,\cdots,r$）

证　把$W(s)$右分解为

$$W(s)=\begin{bmatrix} q_{11}(s) & \cdots & q_{1m}(s) \\ & \cdots\cdots & \\ q_{r1}(s) & \cdots & q_{rm}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(s) & & \\ & \ddots & \\ & & p(s) \end{bmatrix}^{-1} \qquad (2.1)$$

其中，$p(s)$为$W(s)$各元的公分母，显然$\partial p(s)>\partial q_{ij}(s)$　$(i=1,\cdots,r,\quad j=1,\cdots,m)$这里$\partial$表示多项式的次数。

设
$$A(s)=\begin{bmatrix} a_{11}(s) & \cdots & a_{1r}(s) \\ & \cdots\cdots & \\ a_{r1}(s) & \cdots & a_{rr}(s) \end{bmatrix} \qquad B(s)=\begin{bmatrix} b_{11}(s) & \cdots & b_{1m}(s) \\ & \cdots\cdots & \\ b_{r1}(s) & \cdots & b_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

由（2.1）及$W(s)=A^{-1}(s)B(s)$可得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ & \cdots & \\ q_{r1} & \cdots & q_{rm} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p(s)b_{11}(s) & \cdots & p(s)b_{1m}(s) \\ & \cdots\cdots & \\ p(s)b_{r1}(s) & \cdots & p(s)b_{rm}(s) \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

以下用反证法：若对某一行l，有$\partial_{h_l}\ A(s)\leqslant\partial_{h_l}\ B(s)$，则存在$k$，使得$\partial b_{lk}(s)\geqslant\partial a_{li}(s)$ $(i=1,\cdots,r)$。由（2.2）得　$p(s)\cdot b_{lk}(s)=a_{l1}(s)q_{1k}(s)+\cdots+a_{lr}(s)q_{rk}(s)$。但由前述$\partial p(s)>\partial q_{ij}(s)$及$\partial b_{lk}(s)\geqslant\partial a_{li}(s)$和$A(s)$无零行，知$\partial(p(s)b_{lk}(s))>\partial(a_{l1}(s)q_{1k}(s)+\cdots+a_{lr}(s)q_{rk}(s))$矛盾！

定理 2.1　设系统（1.1）中$p=m$，且$G_1(s)$满秩，则D.D.P.有解充要条件为$G_1^{-1}(s)G_2(s)$为严格真有理分式阵，且反馈阵K可求出。

证　记　$R_1(s)\triangleq CA^{\nu-1}B+CA^{\nu-2}Bs+\cdots+CABs^{\nu-2}+CBs^{\nu-1}$

$R_2(s)\triangleq CA^{\nu-1}D+CA^{\nu-2}Ds+\cdots+CADs^{\nu-2}+CDs^{\nu-1}$

充分性证明分两部分完成：先就$\det CB\neq 0$的情况加以证明，然后证明一般情况：

1°　设$\det CB\neq 0$，由引理2.1得

$$G_1(s)=R_1(s)/s^\nu,\quad G_2(s)=R_2(s)/s^\nu \qquad (2.3)$$

$$K(sI-A)^{-1}D=(KA^{\nu-1}D+KA^{\nu-2}Ds+\cdots+KADs^{\nu-2}+KDs^{\nu-1})/s^\nu \qquad (2.4.1)$$

$$K(sI-A)^{-1}B=(KA^{\nu-1}B+KA^{\nu-2}Bs+\cdots+KABs^{\nu-2}+KBs^{\nu-1})/s^\nu \qquad (2.4.2)$$

$$I+K(sI-A)^{-1}B=(KA^{\nu-1}B+\cdots+KBs^{\nu-1}+Is^\nu)/s^\nu \qquad (2.5)$$

代入（1.7）并考虑到$G_1(s)$满秩可得有关K的方程

$$\begin{aligned}&[KA^{\nu-1}B+KA^{\nu-2}Bs+\cdots+KBs^{\nu-1}+Is^\nu]^{-1}\cdot[KA^{\nu-1}D+\cdots+KADs^{\nu-2}+KDs^{\nu-1}]\\&=[CA^{\nu-1}B+\cdots+CBs^{\nu-1}]^{-1}(X_0+X_1s)^{-1}(X_0+X_1s)(CA^{\nu-1}D+CA^{\nu-2}Ds\\&\quad+\cdots+CDs^{\nu-1})\end{aligned} \qquad (2.6)$$

其中，X_0、X_1为待定方阵。

由假定$R_1^{-1}(s)R_2(s)$即$G_1^{-1}(s)G_2(s)$为严格真有理分式阵，由引理2.5知，$\partial_{h_i}\ R_1(s)>\partial_{h_i}\ R_2(s)$　$(i=1,\cdots,p)$，由$R_1(s)$、$R_2(s)$表达式知$CD=0$。

现解与（2.6）有关的下列方程组：

$$\begin{cases}(X_0+X_1s)(CA^{\nu-1}B+\cdots+CBs^{\nu-1})=KA^{\nu-1}B+KA^{\nu-2}Bs+\cdots+KBs^{\nu-1}+Is^{\nu} & (2.7.1)\\ (X_0+X_1s)(CA^{\nu-1}D+\cdots+CDs^{\nu-1})=KA^{\nu-1}D+KA^{\nu-2}Ds+\cdots+KDs^{\nu-1} & (2.7.2)\end{cases}$$

展开（2.7.1）式并比较系数后得：

$$\begin{cases}X_1=(CB)^{-1}\\ [K-(X_0C+(CB)^{-1}CA)][B,\cdots,A^{\nu-1}B]=0\end{cases}\tag{2.8}$$

由(A,B)能控，$\mathrm{rank}[B,AB,\cdots,A^{\nu-1}B]=n$得

$$K=X_0C+(CB)^{-1}CA,\ 其中，X_0可任取，X_1=(CB)^{-1}\tag{2.9}$$

易验证，上述K满足（2.7.2）。这说明方程（2.6）即（1.7）有解。

2° 当$\det CB=0$时，结论也对。

事实上，由$R_1(s)$满秩且根据引理2.4知，$R_1(s)$的系数阵可经有限次变换化为$Q_1^{(L)}$，其中，$Q_1^{(L)}$的末一块为满秩。由引理2.3，由Q_1变换成$Q_1^{(L)}$的过程如下：

$$Q_1=[CA^{\nu-1}B\cdots CB]\to Q_1^{(1)}=[C^{(1)}A^{\nu-1}B,\cdots,C^{(1)}B]\cdots>Q_1^{(L)}$$
$$=[C^{(L)}A^{\nu-1}B,\cdots,C^{(L)}B]$$

现考虑能否对$R_2(s)$的系数阵$Q_2=[CA^{\nu-1}D,\cdots,CAD,CD]$作同$Q_1$相同的一系列变换（因为作第三种变换是有条件的）。由前述知，$CD=0$，故第一次对Q_2作与Q_1相同变换是可以的。由引理2.3知，$Q_2^{(1)}=[C^{(1)}A^{\nu-1}D,\cdots,C^{(1)}AD,C^{(1)}D]$，且由引理2.2知，存在$V_1(s)$使

$$R_1^{(1)}(s)\triangleq V_1(s)R_1(s)=C^{(1)}A^{\nu-1}B+C^{(1)}A^{\nu-2}Bs+\cdots+C^{(1)}Bs^{\nu-1}\tag{2.10}$$

$$R_2^{(1)}(s)\triangleq V_1(s)R_2(s)=C^{(1)}A^{\nu-1}D+C^{(1)}A^{\nu-2}Ds+\cdots+C^{(1)}Ds^{\nu-1}\tag{2.11}$$

显然$[R_1^{(1)}(s)]^{-1}R_2^{(1)}(s)=R_1^{-1}(s)R_2(s)$为严格真有理分式阵，由引理2.5知，$C^{(1)}D=0$，故对$Q_2^{(1)}$可作同由$Q_1^{(1)}\to Q_1^{(2)}$所用的相同的变换，以上过程可继续做下去，最后知存在$V_1(s),V_2(s),\cdots,V_L(s)$，使

$$V_L(s)\cdots V_1(s)R_1(s)=C^{(L)}A^{\nu-1}B+C^{(L)}A^{\nu-2}Bs+\cdots+C^{(L)}ABs^{\nu-2}+C^{(L)}Bs^{\nu-1}\tag{2.12}$$

$$V_L(s)\cdots V_1(s)R_2(s)=C^{(L)}A^{\nu-1}D+C^{(L)}A^{\nu-2}Ds+\cdots+C^{(L)}ADs^{\nu-2}+C^{(L)}Ds^{\nu-1}\tag{2.13}$$

其中，$C^{(L)}B$满秩。

现考虑方程（1.7）是否有解，两边乘$V_L(s)\cdots V_1(s)$，由（2.12）（2.13）得

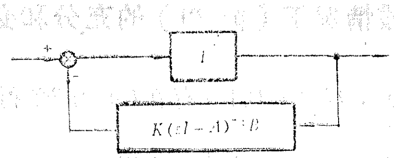
$$(C^{(L)}A^{\nu-1}B+\cdots+C^{(L)}Bs^{\nu-1})\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D$$
$$=C^{(L)}A^{\nu-1}D+\cdots+C^{(L)}Ds^{\nu-1}\tag{2.14}$$

用 $1°$ 结论知方程（2.14）（即（1.7））有解 $K=X_0C^{(L)}+(C^{(L)}B)^{-1}C^{(L)}A$ 其中，X_0 可任取，充分性证毕。

必要性：这时存在矩阵 K，满足

$$[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D=[C(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot C(sI-A)^{-1}D$$

而 $[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}$ 可视下图闭环系统的传递阵，故是真有理分式阵。因此 $[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D$，即 $G_1^{-1}(s)G_2(s)$ 为严格真有理分式阵。



定理 2.2　在定理2.1的条件下，当 (A,B) 为一般形式（即不一定为积分器串联形式时）结论也真。

证　用坐标变换 $x=T\bar{x}$，把（1.1）变为 Yokoyama 能控标准形[5]

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=A_p\bar{x}+B_pu+D_pf\\ y=C_p\bar{x}\end{cases}\tag{2.15}$$

再经某状态反馈 $u=-K'x+v$ 化成积分器串联形式([2])

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=(A_p-B_pK')\bar{x}+B_pv+D_pf\\ y=C_p\bar{x}\end{cases}\tag{2.16}$$

显然系统(1.1)由状态反馈能抗干扰的充要条件是系统（2.16）由状态反馈能抗干扰，即

$$W(s)\triangleq[C_p(sI-A_p+B_pK')^{-1}B_p]^{-1}\cdot C_p(sI-A_p+B_pK')^{-1}D_p\tag{2.17}$$

为严格真有理分式阵。由命题1.1和（1.6）式易知

$$C_p(sI-A_p+B_pK')^{-1}D_p=-G_1(s)[I+K'(sI-A_p)^{-1}B_p]^{-1}\cdot K'(sI-A_p)^{-1}D_p+G_2(s)^*\tag{2.18}$$

$$C_p(sI-A_p+B_pK')^{-1}B_p=G_1(s)\cdot[I+K'(sI-A_p)^{-1}B_p]^{-1}\tag{2.19}$$

由（2.18）、（2.19），

$$W(s)=-K'(sI-A_p)^{-1}D_p+[I+K'(sI-A_p)^{-1}B_p]^{-1}G_1^{-1}(s)G_2(s)$$

注意到 $K'(sI-A_p)^{-1}D_p$ 为严格真有理分式阵，$I+K'(sI-A_p)^{-1}B_p$ 和 $[I+K'(sI-A_p)^{-1}B_p]^{-1}$ 是真有理分式阵，故 $W(s)$ 为严格真有理分式阵的充要条件是 $G_1^{-1}(s)G_2(s)$ 为严格真有理分式阵。这时能使闭环实现抗干扰的反馈阵 $K=(K'+K'')T^{-1}$。这里 K'' 指（2.16）由状态反馈实现抗干扰所用反馈阵。

---

*这里用了关系式：　$A_p=T^{-1}AT$，$B_p=T^{-1}B$，$C_p=CT$

作为定理2.2在单变量情况下，我们有如下推论（证略）。

推论 系统 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu+df\\ y=cx\end{cases}$

其中，(A,b)能控，$A\in R^{n\times n}$，$b\in R^{n\times 1}$，$d\in R^{n\times 1}$，$c\in R^{1\times n}$，由状态反馈实现抗干扰的充要条件为：当$cb=cAb=\cdots=cA^{i-1}b=0$，$cA^{i}b\neq 0$时满足等式$cd=cAd=\cdots=cA^{i-1}d=0$，

四、一般情况下（p≤m）的充分和必要条件

定理 3.1（充分条件） 若对（1.1）存在$(m-p)$个行向量$c_{p+1}\cdots c_m$，使$\widetilde{G}_1^{-1}(s)\widetilde{G}_2(s)$为严格真有理分式阵，则（1.1）能由状态反馈实现抗干扰。

其中，$\widetilde{G}_1(s)=\widetilde{C}(sI-A)^{-1}B$，$\widetilde{G}_2(s)=\widetilde{C}(sI-A)^{-1}D$，$\widetilde{C}=\begin{pmatrix}C\\ c_{p+1}\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}$

证 由$\widetilde{G}_1^{-1}(s)\widetilde{G}_2(s)$为严格真有理分式阵知，系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Df\\ y=\widetilde{C}x\end{cases}\tag{3.1}$$

由状态反馈能实现抗干扰，即方程

$$\widetilde{C}(sI-A)^{-1}B\cdot[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K(sI-A)^{-1}D-\widetilde{C}(sI-A)^{-1}D=0\tag{3.2}$$

有解K，这个K当然满足（1.7），证毕。

定理 3.2（必要条件） 系统（1.1）经状态反馈（1.2）能抗干扰的必要条件是

$$\partial_{h_i}[\det(sI-A)\cdot G_1(s)]>\partial_{h_i}[\det(sI-A)G_2(s)],$$

即 $$\partial_{h_i}[C\operatorname{adj}(sI-A)B]>\partial_{h_i}[C\operatorname{adj}(sI-A)D]\quad(i=1,\cdots,p)$$

证 由假设知存在矩阵K满足

$$0=-G_1(s)[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}\cdot K(sI-A)^{-1}D+G_2(s)\tag{3.3}$$

设 $$C\operatorname{adj}(sI-A)B\triangleq(g_{ij}^{(1)}(s))_{p\times m},\quad C\operatorname{adj}(sI-A)D\triangleq(g_{il}^{(2)}(s))_{p\times q}\tag{3.4}$$

把严格真有理分式阵$W(s)\triangleq[I+K(sI-A)^{-1}B]^{-1}K(sI-A)^{-1}D$右分解

$$W(s)=\begin{pmatrix}r_{11}(s)\cdots r_{1q}(s)\\ \cdots\cdots\\ r_{m1}(s)\cdots r_{mq}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p(s) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & p(s)\end{pmatrix}^{-1}\tag{3.5}$$

其中，$p(s)$为$W(s)$的各元素的公分母，显然$\partial p(s)>\partial r_{jl}(s)(j=1,\cdots,m;\ l=1,\cdots,q)$，这时（3.3）可化为

$$\begin{pmatrix} g_{11}^{(1)}\cdots g_{1m}^{(1)} \\ \cdots\cdots \\ g_{p1}^{(1)}\cdots g_{pm}^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11}\cdots r_{1q} \\ \cdots\cdots \\ r_{m1}\cdots r_{mq} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p(s)g_{11}^{(2)}(s)\cdots p(s)g_{1q}^{(2)}(s) \\ \cdots\cdots \\ p(s)g_{p1}^{(2)}(s)\cdots p(s)g_{pq}^{(2)}(s) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

由条件(A,B)能控易知$(g_{ij}^{(1)}(s))_{p\times m}$无零行，然后采用与引理2.5证明相同手法，可证得

$$\partial_{h_i}\ C\mathrm{adj}(sI-A)B>\partial_{h_i}\ C\mathrm{adj}(sI-A)D \qquad (i=1,\cdots,p)$$

致谢　上海交通大学何关钰副教授对本文提过不少有益的意见，谨此表示衷心的感谢！

参 考 文 献

〔1〕 Wonham, W. M. Linear Multivariable Control, A Geometic Approach, Springer Verlag, (1974).

〔2〕 王世林、韩京清、许可康，干扰具有模型的抗干性问题，系统科学与数学，3:2, (1983), 147—160.

〔3〕 韩京清，线性控制系统的能抗干扰性，自动化学报，7:1, (1981), 13—23.

〔4〕 Xu, K. K., Wang, S. L. and Han, K. C., On Output Invariance for Disturbance, IFAC 8th Triennial World Congress, Kyoto, Japan, Vol. 1, Sessions 1—4, (1981), I—84—89.

〔5〕 韩京清，线性系统的结构与反馈系统计算，全国控制理论及应用学术交流会议论文集，科学出版社，北京，(1981), 43—55.

Conditions for Disturbance Resistance of a Linear System by the State Feedback

Zhang Yu

(School of Management, the University of Science & Technology)

Han Jingqing

(Institute of Systems Scienc e, Academic Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, D.D.P. is considered by the method of transfer function matrices. A sufficient and necessary condition for the solvability of D.D.P. is derived for $p=m$. This article also presents a new algorithm for finding a state feedback matrix.