

状态空间自校正动态解耦控制器

周其节 钟慕良 苏春翌

(华南理工大学自动化系, 广州)

摘 要

本文针对一类系统提出了一种新的自校正动态解耦的方法。首先借助于系统的关联矩阵, 给出了系统可由状态反馈实现动态解耦的充要条件, 然后以此为基础, 导出了相应的自校正控制算法。

一、引 言

解耦对许多多变量系统来说是必须的。但一般的方法均要求精确的模型, 因而用自校正的方法来实现解耦是有意义的。文献[1]、[2]、[3]、[4]分别提出了各种自校正解耦控制的方法, 而它们的设计均采用显式或隐式自校正的方法。本文提出了另一种动态解耦的控制方法。它以系统输入输出模型为基础, 利用等价的状态空间模型, 从而得到状态空间自校正动态解耦控制器。

二、状态空间动态解耦控制器的设计

设系统由下述差分方程描述:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + D(q^{-1})e(t) \quad (1)$$

其中, $y(t)$ 和 $u(t)$ 为 m 维输出、输入向量, $e(t)$ 表示 m 维新息序列, 序列 $\{e(t)\}$ 满足

$$E\{e(t) | F_{t-1}\} = 0, E\{e(t)e(t)^T\} = R$$

这里 F_t 是由 $y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots$ 生成的 σ -代数。 $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 是后移算子 q^{-1} 的多项式矩阵, 其形式为: $x(q^{-1}) = x_0 + \dots + x_{n_x} q^{-n_x}$ 。这里要求 $C(0) = I_m$, $A(0) = I_m$, 并且 $\det C(q^{-1})$ 的零点在单位圆内。

系统(1)的等价状态空间表示为^[5]

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \quad (2a)$$

$$y(t) = Cx(t) + e(t) \quad (2b)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} -A_1 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ -A_2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -A_n & 0 & \cdots & I_m & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} D_1 - A_1 \\ \vdots \\ D_n - A_n \end{pmatrix} \quad C = [I_m \ 0 \ \cdots \ 0]$$

这里 $n = \max(n_A, n_B)$, 并且 $A_i = 0, n_A < i \leq n; B_i = 0, n_B < i \leq n; D_i = 0, n_D < i \leq n$.

设 $T(q)$ 为系统的关联矩阵 (interactor matrix) [6], 即

$$\lim_{q \rightarrow \infty} T(q)A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1}) = K_T \quad (3)$$

其中 $K_T < \infty$, 并且非奇异. 这里关联矩阵 $T(q)$ 为多项式矩阵, 并且具有下述结构:

$$T(q) = L(q)H(q) \quad (4)$$

$$L(q) = \text{diag}(q^{f_1} \cdots q^{f_m})$$

$$H(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ h_{12}(q) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ h_{m1}(q) & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

具有 (4) 式结构, 满足方程 (3) 的 $T(q)$ 是唯一的 [7].

引理 设有状态反馈 $u(t) = Ex(t) + Gr$ (r 为参考输入), 则系统 (2) 能够由状态反馈实现系统输出对参考输入的动态解耦的充要条件是方程

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \{ R(q)A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1}) \} = B_T \quad (5)$$

中的 B_T 非奇异 [8].

其中 $R(q) \triangleq \text{diag}(q^{\bar{f}_1} \cdots q^{\bar{f}_m})$, \bar{f}_i 为系统的解耦指标, 即 $\bar{f}_i = \min A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1})$ 的第 i 行的分母与分子阶次之差.

由于在方程 (1) 或 (2) 的形式下, 当系统参数未知或缓慢变化时, 很难判定 B_T 的奇异性, 无法在线知道系统能否由状态反馈来实现系统的动态解耦. 为了能够在线进行系统的动态解耦, 我们借助于系统的关联矩阵, 给出另一种由状态反馈实现系统动态解耦的充要条件.

定理 1 B_T 满秩的充要条件是关联矩阵 $T(q)$ 为对角阵. 并且此时 $T(q) = R(q)$, $B_T = K_T$.

证 若 B_T 满秩, 由于 $R(q)$ 已具有 (4) 式的结构, 并且有 $\lim_{q \rightarrow \infty} R(q)A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1}) = B_T$, 由关联矩阵的定义和唯一性可知, $T(q) = R(q)$, 即为对角阵.

若关联矩阵为对角阵, 则由 $T(q)$ 的构造和唯一性可知, $T(q) = \text{diag}(q^{f_1} \cdots q^{f_m})$,

其中 $f_i \triangleq \min(A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1}))$ 的第 i 行分母与分子阶次之差, 故 $f_i = \bar{f}_i$. 即 $T(q) = R(q)$, $\lim_{q \rightarrow \infty} T(q)A(q^{-1})B(q^{-1}) = K_T = B_T$, 故 B_T 满秩.

以上引理和定理说明系统 (1) 的状态空间实现可由状态反馈实现系统的动态解耦的充要条件是系统 (1) 的关联矩阵为对角阵.

定理 2 若 $T(q)$ 为对角阵, 并设 $N \triangleq [(C_1 A^{f_1})^T \dots (C_m A^{f_m})^T]^T$ (C_i 为 C 的第 i 行).

取 $E = -K_T^{-1}N$, $G = K_T^{-1}$, 则方程 (2) 在状态反馈 $u(t) = Ex(t) + Gr$ 的作用下, 可实现系统输出对参考输入的动态解耦, 即

$$y(t) = T(q)^{-1}r + [I_m + C(qI_m - A - BE)^{-1}K]e(t) \quad (6)$$

证 与文献[8]的证明方法相类似, 见文献[8].

上述结论说明系统的闭环极点位于原点, 系统的输出在有限拍内可跟踪参考输入.

上面我们给出了一般的实现动态解耦的条件. 由于 $T(q)$ 为对角阵的条件还未有一般的结论, 这里仅给出 $T(q)$ 为对角阵的一种充分条件.

由于系统 (1) 中的 $B(q^{-1})$ 中的元素可表示为

$$B_{ij}(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_{b_{ij}}} q^{-i} b_{ij} q^{-i}$$

其中 K_{ij} 和 $n_{b_{ij}}$ 分别表示为第 j 个输入与第 i 个输出子系统中 $B_{ij}(q^{-1})$ 的时滞和阶数. 故我们有

定理 3 当 $K_{ii} < K_{ij}$ ($j=1, \dots, m$) 时, $T(q)$ 必为对角阵, 且 $T(q) = \text{diag}(q^{-1} q^{-1}, \dots, q^{-1} q^{-1})$.

证 可由关联矩阵的构造和定义直接得出.

条件 $K_{ii} < K_{ij}$ 的物理意义为子系统的时滞小于其关联子系统的时滞, 许多实际系统均满足这个条件.

在上述条件下, 为了在线计算 K_T , 则令

$$P(q^{-1}) \triangleq A(q^{-1})^{-1}B(q^{-1}) = P_1 q^{-1} + P_2 q^{-2} + \dots + P_1 q^{-1} + \dots \quad (7)$$

其中, $A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} + \dots + A_n q^{-n}$

$$B(q^{-1}) = B_1 q^{-1} + \dots + B_n q^{-n}$$

$$n = \max(n_B, n_A), A_i, B_i = 0, \text{ 若 } n_A < i \leq n, n_B < i \leq n$$

则有
$$P_K = \begin{cases} B_K - \sum_{j=0}^K A_j P_{K-j} & K \leq n \\ -\sum_{j=1}^K A_j P_{K-j} & K > n \end{cases} \quad (8)$$

其中, $S = \min(K, n)$, $P_0 = 0$.

由于 $T(q) = \text{diag}(q^{-1} q^{-1}, \dots, q^{-1} q^{-1})$, 故

$$K_T = \begin{pmatrix} (P_{K_{11}})_{11} \\ (P_{K_{22}})_{22} \\ \vdots \\ (P_{K_{mm}})_{mm} \end{pmatrix} \quad ((P_{K_{ii}})_{ii} \text{ 为 } P_{K_{ii}} \text{ 的第 } i \text{ 行}) \quad (9)$$

这时状态反馈 $u(t) = Ex(t) + Gr$ 可表示为

$$u(t) = - \begin{pmatrix} (P_{K_{11}})_{11} \\ \vdots \\ (P_{K_{mm}})_{mm} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (A^{K_{11}})_{11} \\ \vdots \\ (A^{K_{mm}})_{mm} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} (P_{K_{11}})_{11} \\ \vdots \\ (P_{K_{mm}})_{mm} \end{pmatrix}^{-1} r \quad (10)$$

这里 $(A^{K_{ii}})_{ii}$ 为 $A^{K_{ii}}$ 的第 i 行。

三、自校正动态解耦控制算法

当系统的参数未知或缓慢变化时,则必须在线辨识系统的参数,然后运用确定性等价原则,按照给定的控制规律进行控制,从而实现系统的自校正控制。

设 K_{ii} 已知,并且 $K_{ii} < K_{ii}^*$ ($j=1, \dots, m$),为了辨识系统(1)中的参数 $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 和 $D(q^{-1})$,将系统方程写为

$$y_i(t) = \theta_i^T \phi(t) + \varepsilon_i(t) \quad (11)$$

其中, θ_i 为 $[A_1 \dots A_{n_A} \quad B_1 \dots B_{n_B} \quad D_1 \dots D_{n_D}]$ 的第 i 列。

$$\phi(t) = [-y^T(t-1), \dots, -y^T(t-n_A), u^T(t-1), \dots, u^T(t-n_B), \hat{\varepsilon}^T(t-1), \dots, \hat{\varepsilon}^T(t-n_D)]$$

ε_i 为残差向量 $\varepsilon(t)$ 的第 i 个分量。

根据递推最小二乘法,可以得到估计值 $\hat{A}(q^{-1})$ 、 $\hat{B}(q^{-1})$ 和 $\hat{D}(q^{-1})$ 。运用这些参数,可以计算状态反馈系数矩阵。为了应用状态反馈,则必须在线估计系统的状态。这里我们构造一状态观测器。对于系统(2),设其状态观测器为

$$\hat{\dot{x}}(t) = F\hat{x}(t) + Bu(t-1) + My(t-1) \quad (12)$$

$$\text{若取 } F = A - KC \quad (13a)$$

$$M = K \quad (13b)$$

$$\text{则 } \lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}(t)) = 0$$

因为 $\dot{x}(t) - \hat{\dot{x}}(t) = F(x(t-1) - \hat{x}(t-1))$, F 的结构为

$$F = \begin{pmatrix} D_1 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & I_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

故 F 的特征多项式为: $Q(\lambda) \triangleq \det[\lambda I^n + D_1 \lambda^{n-1} + \dots + D_n]$, 由于 $\det D(q^{-1})$ 的零点均在单位圆内, 故观测器 (12) 是渐近稳定的。

(9) 这时系统的状态反馈为

$$u(t) = \hat{E} \hat{x}(t) + \hat{G}r \quad (14)$$

$$\hat{E} = - \begin{bmatrix} (\hat{P}_{K_{11}})_{11} \\ \vdots \\ (\hat{P}_{K_{mm}})_{mm} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\hat{A} K_{11})_{11} \\ \vdots \\ (A K_{mm})_{mm} \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} (\hat{P}_{11})_{11} \\ \vdots \\ (\hat{P}_{K_{mm}})_{mm} \end{bmatrix}^{-1}$$

其中, $\hat{P}_{K_{ii}}$ 由估计值 \hat{A}_i 和 \hat{B}_i 按 (8) 式计算得到。

四、计算机仿真

这里取文献[9]中的例子。设系统方程为

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 1.4q^{-1} + 0.48q^{-2} & -0.2q^{-1} + 0.1q^{-2} \\ 0.1q^{-1} & 1 - 0.9q^{-1} + 0.2q^{-2} \end{bmatrix},$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} q^{-1} + 1.5q^{-2} & q^{-2} \\ 0 & q^{-2} \end{bmatrix}, \quad D(q^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 - 0.5q^{-1} & 0 \\ 0.1q^{-1} & 1 - 0.3q^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $e(t)$ 为白噪声, 方差 $R = \text{diag}(0.1, 0.1)$, 递推最小二乘法用 UD 分解来实现。图 1 表明, 应用本文提出的自校正动态解耦算法, 系统实现了输出对参考输入的动态解耦, 并且对给定的参考输入具有很好的跟踪能力。

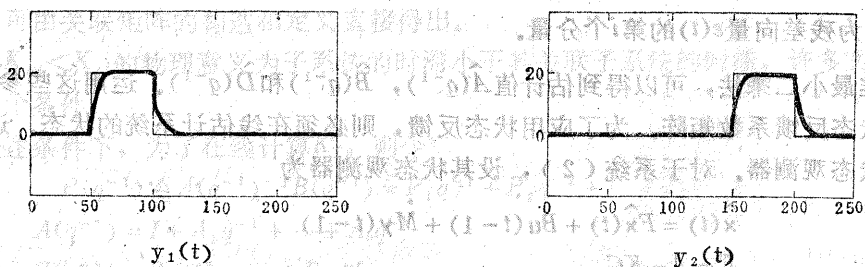


图 1 系统对给定值变化的影响

五、结 论

本文借助于关联矩阵的概念, 给出了系统由状态反馈实现动态解耦的充要条件, 并且针对一类系统给出了相应的自校正控制算法, 从而得到了系统自校正动态解耦的一种新方法。仿真结果表明算法正确, 效果较好。

参 考 文 献

- [1] Mc Dermott, P.E. and D.A. Mellichamp, A Decoupling Pole Placement Self-tuning Controller For A Class of Multivariable Processes, IFA C9th Triennial World Congress, Budapest, Hungary, (1984).
- [2] 柴天佑、郎世俊、顾兴源, 多变量自校正前馈控制器及应用, 自动化学报, 12:3, (1986), 229—236.
- [3] 钟慕良、苏春翌, 多变量极点配置自校正动态解耦控制器, 控制理论与应用, 5:1, (1988), 25—32.
- [4] Hersh, M.A., Multiloop Self-tuning Control, Decoupling and Pole-assignment Regulators for n-input n-output Stochastic Systems, INT. J. Control, 45:1, (1987), 33—45.
- [5] Bezanson, L.W. and S.L. Harris, State-space Design of Multivariable Self-tuning Regulators, INT. J. Control, 39:2, (1984), —
- [6] Goodwin, G.C. and K.S. Sin, Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall, New Jersey, (1984), 395—411.
- [7] Wolovich, W.A., and P.L. Falb, Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Compensation, SIAM. J. Control, Optim., 14:6, (1976), 996—1008.
- [8] Chen, C.T., Linear System Theory and Design, Prentice-Hall, New Jersey, (1984).

State Spale Self-tuning Dynamic Decoupling Controller

Zhou Qijie, Zhong Muliang, Su Chunyi

(Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

This paper presents a new self-tuning dynamic decoupling method.

A necessary and sufficient condition for the dynamic decoupling of system by state feedback is proposed, which is based on the interactor matrix of system, then the corresponding self-tuning algorithm is derived.