第6卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.6, No.2
1989年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1989

线性离散事件动态系统在广义反馈律下的动态特性分析*

王 龙　郑大钟

（清华大学自动化系，北京）

摘　要

基于极大代数，一类离散事件动态系统可被看作为“线性”系统．本文讨论这类系统在广义反馈律下的动态特性，证明了这类系统最终呈现周期性，还研究了系统参数发生摄动时其性能的变化特点，给出了具体例子来解释广义反馈律的物理意义和证实文中的结论．

一、引　言

离散事件动态系统的研究受到了控制界的极大关注，出现了各种各样的分析方法[1-9]，被认为是对控制界的一个挑战．法国学者G.Cohen等人应用极大代数，将一类离散事件系统看作这种代数意义下的“线性”系统，将闭环系统的周期特性表征为求解特征值和特征向量问题，为分析离散事件系统提供了新的思路．

在实际问题中，仓库（缓冲器）容量总是有限的，这就导致了系统的第k次资源输入不仅与第$k-1$次的资源输出有关，而且与第$k-2$，$k-3$，…，$k-l$次的资源输出有关（参看文中的例子），因此系统的输入输出之间存在着广义反馈形式

$$U(k)=K_1Y(k-1)\oplus K_2Y(k-2)\oplus\cdots\oplus K_lY(k-l)$$

称为广义反馈律．广义反馈律是由系统内部的约束产生的，在多条生产线的协调运行中，我们也可通过人为地选择反馈阵使整个系统尽快达到稳态周期运行[10]．

本文研究Cohen模型在广义反馈律下的动态特性，证明了系统在广义反馈律下的运动具有渐近周期性，还进一步研究了系统参数发生摄动时，其周期的变化特点，给出了具体例子．

二、系　统　模　型

法国学者G.Cohen以柔性制造系统为背景建立了如下的状态方程和输出方程

$$X(k)=AX(k)\oplus BU(k) \tag{1}$$

*国家自然科学基金及高技术CIMS项目资助的课题．

本文于1988年4月1日收到．1989年3月5日收到修改稿．

$$Y(k)=CX(k) \tag{2}$$

其中$X(k)\in\overline{R}^n$，$U(k)$、$Y(k)\in\overline{R}^m$，A、B、C是相应维数的常阵（记$\overline{R}=\mathrm{R}\cup\{-\infty\}$），各种运算均在极大代数意义下进行。

系统（1）、（2）具有唯一解

$$Y(k)=CA^*BU(k) \tag{3}$$

其中

$$A^*=I\oplus A\oplus\cdots\oplus A^{n-1} \tag{4}$$

当输入输出存在如下形式的反馈时

$$U(k)=KY(k-1) \tag{5}$$

闭环系统的输出存在递推关系

$$Y(k)=CA^*BKY(k-1) \tag{6}$$

业已证明，存在正整数d和k_0使

$$Y(k)=\lambda^dY(k-d)\qquad k\geqslant k_0 \tag{7}$$

其中λ是矩阵$M=CA^*BK$在极大代数意义下的特征值。由此看出，闭环系统经过一段过渡过程后进入周期运行。

三、系统在广义反馈律下的动态特性

对于（1）、（2）描述的离散事件系统，已知$U(i)=U_i$（$i=0,1,\cdots,l-1$）。考虑广义反馈律（$k\geqslant l$）

$$U(k)=K_1Y(k-1)\oplus K_2Y(k-2)\oplus\cdots\oplus K_lY(k-l) \tag{8}$$

由（3）知

$$Y(k)=CA^*BU(k)=CA^*BK_1Y(k-1)\oplus CA^*BK_2Y(k-2)\oplus\cdots\oplus CA^*BK_lY(k-l)$$

命

$$M_i=CA^*BK_i\qquad i=1,2,\cdots,l$$

则有

$$Y(k)=M_1Y(k-1)\oplus M_2Y(k-2)\oplus\cdots\oplus M_lY(k-l)$$

在实际问题中，矩阵CA^*B总是不可约的[6,7]，矩阵K_i一般为对角阵，因此可认为矩阵M_i是不可约的。命

$$Z(k)=[Y^T(k)\quad Y^T(k-1)\quad\cdots\quad Y^T(k-l+1)]^T$$

则有

$$Z(k)=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_l \\ I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{pmatrix}Z(k-1) \tag{9}$$

且初值

$$Z(l-1)=[(CA^*BU_{l-1})^T\quad(CA^*BU_{l-2})^T\cdots(CA^*BU_0)^T]^T$$

注意，通过上述变换，我们将问题化为了（6）式的递推形式，但变量$Z(k)$是否具有渐近周期性还不清楚，因为我们并不知道（9）式中的矩阵是否为不可约的。另外变换后的变量$Z(k)$维数比原来的$Y(k)$维数高，系统（9）的性能评价将变为求解一个

$ml\times ml$矩阵的特征值，下面我们将给出这个特征值的一个估计式，该估计式只涉及求解$m\times m$矩阵的特征值。

引理 1 设$M_i\in\overline{R}^{m\times m}$ $(i=1,2,\cdots,l)$为不可约矩阵，则

$$M=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_{l-1} & M_l \\ I & & & \vdots & \\ & I & & \vdots & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & I & \end{pmatrix}\in\overline{R}^{ml\times ml}$$

也是不可约矩阵。

篇幅所限，证明从略。

定理 1 对于(1)、(2)描述的离散事件系统，在广义反馈律(8)下构成闭环系统，则存在正整数d和k_0，使当$k\geqslant k_0$时，有

$$Y(k+d)=\lambda^d Y(k) \tag{10}$$

其中λ是矩阵M在极大代数意义下的特征值，d为其周期阶数。

证 由引理1知M为不可约矩阵，因此存在正整数d和k_0，使当$k\geqslant k_0$时，有

$$M^{k+d}=\lambda^d M^k$$

因此对递推方程(9)，我们有

$$Z(k+d)=\lambda^d Z(k)$$

因此有

$$Y(k+d)=\lambda^d Y(k).$$

上述定理表明，闭环系统呈现渐近周期性。具体到柔性制造系统，矩阵M的特征值有重要的物理意义，它表征闭环系统的稳态运行效率。下面我们用两个$m\times m$矩阵的特征值估计$M\in\overline{R}^{ml\times ml}$的特征值。

定理 2 设矩阵$M_1=CA^*BK_1\in\overline{R}^{m\times m}$的特征值为$\underline{\lambda}$，矩阵$M\in\overline{R}^{ml\times ml}$的特征值为$\lambda$，矩阵$\overline{M}=M_1\oplus\underline{\lambda}^{-1}M_2\oplus\cdots\oplus\underline{\lambda}^{-(l-1)}M_l$的特征值为$\overline{\lambda}$，则有

$$\underline{\lambda}\leqslant\lambda\leqslant\overline{\lambda} \tag{11}$$

证 设$Mh=\lambda h$，命$h=[h_1^T\ h_2^T\cdots h_l^T]^T$。其中，$h_i\in\overline{R}^m$ $(i=1,2,\cdots,l)$，则有

$$M_1h_1\oplus M_2h_2\oplus\cdots\oplus M_lh_l=\lambda h_1 \tag{12}$$

且

$$h_j=\lambda h_{j+1}\quad (j=1,2,\cdots,l-1) \tag{13}$$

因此有

$$[M_1\oplus\lambda^{-1}M_2\oplus\lambda^{-2}M_3\oplus\cdots\oplus\lambda^{-(l-1)}M_l]h_1=\lambda h_1$$

即λ可看作是矩阵$[M_1\oplus\lambda^{-1}M_2\oplus\cdots\oplus\lambda^{-(l-1)}M_l$的特征值，根据特征值的图论意义，矩阵$M_1\oplus\lambda^{-1}M_2\oplus\cdots\oplus\lambda^{-(l-1)}M_l$对应的有向图中最大回路平均权重不小于矩阵$M_1$的，故有$\underline{\lambda}\leqslant\lambda$，由此有矩阵$M_1\oplus\lambda^{-1}M_2\oplus\cdots\oplus\lambda^{-(l-1)}M_l$对应的有向图中最大回路平均权重

不大于矩阵$M_1\oplus\underline{\lambda}^{-1}M_2\oplus\cdots\oplus\underline{\lambda}^{-(l-1)}M_l$的，故有$\lambda\leqslant\overline{\lambda}$。

例　以文献〔7〕中的加工过程为例

加工时间表为

	P_1	P_2	P_3
M_1		1	5
M_2	3	2	3
M_3	4	3	

由于仓库容量有限，要求第二种零件加工过程中，第k次加工开始不仅需在第$k-1$次结束后，而且还要在第$k-2$次加工结束后11个单位时间方可进行。因此有

$$U(k)=K_1Y(k-1)\oplus K_2Y(k-2)\qquad(k\geqslant2)$$

其中，$K_1=I_6\in\overline{R}^{6\times6}$

$K_2=\mathrm{diag}\{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 11\ \ 0\}$

由〔7〕知$M_1=CA^*BK_1$的特征值$\underline{\lambda}=9.5$且

$$M_1\oplus\underline{\lambda}^{-1}M_2=M_1\oplus9.5^{-1}CA^*BK_2$$

$$=\begin{pmatrix}6&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&7.5&5\\9&8&\varepsilon&8&10.5&8\\6&10&7&10&7.5&\varepsilon\\\varepsilon&7&4&7&\varepsilon&\varepsilon\\6&10&7&10&7.5&\varepsilon\\9&8&\varepsilon&8&10.5&8\end{pmatrix}\qquad(\varepsilon=-\infty)$$

其特征值$\overline{\lambda}=10.25$，因此$9.5\leqslant\lambda\leqslant10.25$。

通过仿真可以验证$\lambda=10$，可见上面的估计是令人满意的。

四、参数摄动时系统的性能估计

一般地说，当系统的参数矩阵A、B、C、K_i的元素发生摄动时，整个系统的运行效率也随之改变，即系统矩阵M的特征值λ将发生变化。下面给出λ变化的上下界，这个上下界是可以达到的，因此这个估计是最好的[9]。

定理3　对于(1)、(2)、(8)构成的闭环系统，参数矩阵A、B、C、K_i($i=1,2,\cdots,l$)的元素发生摄动时，有

$$\rho(\lambda)\leqslant(n-1)\rho(A)+\rho(B)+\rho(C)+\max_i\rho(K_i)\tag{14}$$

其中　$\rho(\cdot)$表示"·"的摄动量[9]。

证　由文献〔9〕的有关定义及其中的引理4有

$$\rho(\lambda)\leqslant\rho(M)\tag{15}$$

同时 $$\rho(M)=\max_i \rho(CA^*BK_i)$$
$$\leqslant \max_i[\rho(C)+\rho(B)+(n-1)\rho(A)+\max_i \rho(K_i)]$$
$$=\rho(C)+\rho(B)+(n-1)\rho(A)+\max_i \rho(K_i) \qquad (16)$$

综合（15）、（16）即得证。

五、结　论

本文针对实际系统中缓冲器容量有限的约束，提出了用广义反馈律来描述闭环系统的输入输出关系，试图将这种约束反映在反馈律中，从而建立系统的描述方法。本文证明广义反馈律下的闭环系统仍具有渐近周期性，还研究了系统参数发生摄动时，其动态性能变化的上下界。文中的例子进一步证实了上述结论，给出了广义反馈律在实际系统中的物理解释。

参 考 文 献

〔1〕 Denning, P.J.and Buzen, J.P., The Operational Analysis of Queueing Network Models, ACM Computing Surveys, 10, (1978), 225—261.

〔2〕 Buzen, J.P. and Denning, P.J., Operational Treatment of Queue Distributions and Mean Value Analysis, Computer Performance, 1, (1980), 6—15.

〔3〕 Ho, Y.C. and Cao, X.R., Perturbation Analysis and Optimization of Queueing Networks, Journal of Optimization Theory and Applications, 40:4, (1983), 559—582.

〔4〕 Ho, Y.C., Cao, X.R. and Cassandras, C., Infinitesimal and Finite Perturbation Analysis for Queueing Networks, Automatica, 19:4, (1983), 439—445.

〔5〕 Ho, Y.C.and Cassandras, C., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, Automatica, 19:2, (1983), 149—167.

〔6〕 Cohen, G., Dubois, D., et al ,A Linear System Theoretic View of Discrete-event Processes and Its Use for Performance Evaluation in Manufacturing, IEEE Trans, on Automatic Control, AC-30:3, (1985), 210—220.

〔7〕 Cohen, G., Dubois, D., et al, A Linear System Theoretic View of Discrete-event Processes, Proc. of 22nd Conf. on Decision and Control, (1983), 1039—1044.

〔8〕 王龙、郑大钟，一类柔性制造系统的运行特性，信息与控制，5，（1988），1—5.

〔9〕 郑大钟、王龙，参数摄动时一类离散事件动态系统的渐近性能估计和鲁棒性条件，全国控制理论与应用年会论文集，（1988），93—66.

〔10〕 王龙、郑大钟，线性离散事件动态系统控制的一些新结果，清华大学学报，29:4，（1989）.

Dynamic Behavior of Linear Discrete Event Dynamic Systems Under the Generalized Feedback Law

Wang Long, Zheng Dazhong

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing)

Abstract

Based on Max-algebra, a class of Discrete Event Dynamic Systems can be viewed as linear systems. This paper discusses the dynamic properties of these systems under the so-caued generalized feedback law and proves that the systems exhibit periodical behaviors after the transient processes. The performance variations of the systems due to the parameter perturbations are also investigated. The example given in this paper not only verifies various conclusions, but also gives a physical interpretation of the generalized feedback law.