第6卷 第4期
1989年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.6, No.4
Dec., 1989

LQ最优控制之逆问题的研究

王耀青 吕勇哉

（浙江大学化工系，杭州）

摘 要

本文通过适当地选取LQ性能指标函数中的加权矩阵 R，给出了该二次型性能指标函数中的另一个加权矩阵 Q 与系统的开环特征多项式、闭环特征多项式的系数以及系数的系数矩阵 A、B 之间的对应关系。如果给定一个系统以及该系统的一组最优闭环极点，就可以求得矩阵 Q。同时，用本文的研究结果，还可以直接确定系统的最优状态反馈系数矩阵。

关键词：最优控制；加权矩阵；LQ逆问题；特征值；特征多项式。

一、引 论

设系统的状态空间表示为

$$\dot{X}=AX+Bu \tag{1.1}$$

式中 $A\in\mathscr{R}^{n\times n}$，$B\in\mathscr{R}^{n\times m}$，$X$、$u$ 分别为 n 维和 m 维矢量。二次型性能指标函数为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(X^TQX+u^TRu)\mathrm{d}\tau \tag{1.2}$$

式中 $Q^T=Q\geqslant0$，$R^T=R>0$。不失一般性，设 $Q=D^TD$，且 (D,A) 可观。当 $t_f\to\infty$ 时，系统的最优控制器为

$$u=-KX=-R^{-1}B^TPX \tag{1.3}$$

且式中的矩阵 P 是代数Riccati方程

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \tag{1.4}$$

的解；K 称为系统的最优状态反馈系数矩阵。当 (A,B) 可控时，给定方程(1.1)和(1.2)，用方程(1.4)求得方程(1.3)的方法及其相关的理论已经很成熟。但是，为了获得较好的控制特性，工程上往往要预先通过试凑的方法确定矩阵 Q 和 R，这是十分不方便的。所以，研究如何确定满足闭环系统特征（值）要求的加权矩阵 Q、R 的方法是十分有意义的。这就是线性二次型最优控制之逆问题[1,2]。对这一问题进行研究的结果很多[3—5]，但这些方法多基于迭代算法。而直接以解析形式直接给出矩阵 Q、R 与系统的开环、闭环特征之间的关系表达式还少见。所以，本文将从最优控制之逆问题的角

本文于1987年11月4日收到。1989年3月13日收到修改稿。

度，分别给出在连续、离散两类系统下的这一研究结果．结果表明，在适当地选取矩阵 R 的条件下，矩阵 Q 可以由系统的开环、闭环特征所给定．

二、矩阵K、Q和R的确定

我们知道，在研究LQ最优控制之逆问题时，必须要考虑到矩阵 $Q=Q^T\geqslant 0$，$R=R^T>0$ 的存在性问题．为了保证矩阵对 (Q,R) 的存在性，我们假定本文中系统的闭环特征值 λ_{ci}，$i=1,2,\cdots,n$，均是按照文献〔7〕中的结论所给定，并记作 $\lambda_{ci}\in\mathscr{C}^-_{\text{opt}}$．

定理 1 考虑如方程(1.1)所描述的系统，其开环系统的特征多项式定义为

$$P_0(s)=\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0 \tag{2.1}$$

如果系统所期望的闭环特征多项式指定为

$$P_c(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_{ci})=s^n+\overline{\alpha}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\overline{\alpha}_1 s+\overline{\alpha}_0 \tag{2.2}$$

λ_{ci} 为期望的闭环特值，$\lambda_{ci}\in\mathscr{C}^-_{\text{opt}}$，且存在矢量 $U\in\mathscr{R}^{m\times 1}$ 使得矩阵

$$C=(b\quad Ab\cdots A^{n-1}b),\quad b=BU \tag{2.3}$$

满秩，则存在某对矩阵 $Q\geqslant 0$，$R>0$ 使得系统满足闭环特征值要求的最优状态反馈矩阵具有如下形式

$$K=U\overline{K},\quad \overline{K}=(\overline{\alpha}_0-\alpha_0\cdots\overline{\alpha}_{n-1}-\alpha_{n-1})(CH)^{-1} \tag{2.4}$$

式中

$$H=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\\ \vdots & \iddots & \\ \alpha_n & & 0\end{pmatrix}$$

且不失一般性，设 U 的第一个元素非零．

证 定义一对称正定矩阵 R：

$$R=T^{-1}\overline{R}T^{-1},\quad \overline{R}=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sigma_m\end{pmatrix},\quad \sigma_i\to+\infty,\quad T=\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0\\ U & & & \\ & & I_{m-1} & \end{array}\right) \tag{2.5}$$

则方程(1.3)和(1.4)分别变为

$$K=T\overline{R}^{-1}T^TB^TP \tag{2.6}$$

$$A^TP+PA-PBT\overline{R}^{-1}T^TB^TP+Q=0 \tag{2.7}$$

定义

$$Q=\overline{Q}+PB[\operatorname{diag}(0\quad \sigma_2^{-1}\ \cdots\ \sigma_m^{-1})]\triangleq\overline{Q}_n+\widetilde{Q} \tag{2.8}$$

则方程(2.7)可以表示为

$$A^TP+PA-Pbb^TP+\overline{Q}=0,\quad b=BU \tag{2.9}$$

显然，对于某个$\overline{Q}\geqslant 0$，方程(2.9)有$P=P^T>0$的解，且由方程(2.8)可以求得$\forall\sigma_i>0$时的Q，$Q\geqslant 0$，使得方程(2.7)的解与方程(2.9)的解相等。这就表明，由方程(2.6)和(2.9)所确定的矩阵K就是系统对应于加权矩阵$Q(Q=\overline{Q}+\widetilde{Q})$，$R$时的最优状态反馈系数矩阵。当$\sigma_i\to\infty$，$i=2,3,\cdots,n$，时，由方程(2.8)和(2.9)可知$Q|_{\sigma_i\to\infty}=\overline{Q}$，且方程(2.6)变为

$$K=U\overline{K},\quad \overline{K}=b^TP \tag{2.10}$$

所以，由方程(2.9)和(2.10)所确定的K就是系统的最优状态反馈系数矩阵，且$\overline{K}$为系统(A,b)的最优状态反馈系数矩阵。因此，我们现在只要证明存在$\overline{Q}\geqslant 0$使得(2.4)与(2.10)式相等价即可。

对于系统(A,b)的最优状态反馈矩阵$\overline{K}$来说，由$\overline{K}$的唯一性可知，满足λ_{ci}要求的矩阵$\overline{K}$只能是方程(2.4)。又因为$\lambda_{ci}\in\mathscr{C}^-_{\text{opt}}$，所以$\exists\overline{Q}\geqslant 0$使得由方程(2.9)和(2.10)所决定的$\overline{K}$与方程(2.4)中的$\overline{K}$相一致。$\overline{Q}\geqslant 0$意味着$Q>0$，所以，存在某一矩阵对$Q\geqslant 0$，$R>0$使得系统的最优状态反馈矩阵$K$具有方程(2.4)这一形式，且$P_c(s)=\det(sI-A+BK)$。　证毕。

定理1的结论表明，如果系统存在$U\in\mathscr{C}^{m\times 1}$使得$\mathrm{Rank}C=n$，则满足系统闭环特征值$\lambda_{ci}$，$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda_{ci}\in\mathscr{C}^-_{\text{opt}}$，要求的最优状态反馈系数矩阵$K$可取为方程(2.4)这一形式，因而系统$(A,B)$的最优控制器的设计问题简化为SI系统$(A,b)$的最优控制器的设计问题。矩阵$U$是在保证$\mathrm{Rank}C=n$的条件下的任意取值。当系统不存在$U$使得$\mathrm{Rank}C=n$时的情况有待于进一步研究。

定理1中只是证明了存在某对矩阵$Q\geqslant 0$，$R>0$使得满足系统闭环特征值要求的最优状态反馈系数矩阵K具有方程(2.4)这一形式。下面的定理将给出所存在的Q，R的具体表达式。

定理2　设系统如方程(1.1)所描述，且满足定理1中所假设的条件。如果系统的开、闭环特征多项式分别由方程(2.1)和(2.2)所定义，则使得方程(2.4)成立时的加权矩阵Q由方程

$$Q=(CH)^{-T}\mathrm{diag}(\widetilde{Q}_{11}\quad\widetilde{Q}_{22}\quad\cdots\quad\widetilde{Q}_{nn})(CH)^{-1} \tag{2.11}$$

$$\widetilde{Q}_{ii}=\sum_{j=0}^{2i}(-1)^{i+j}(\overline{\alpha}_j\overline{\alpha}_{2i-j}-\alpha_j\alpha_{2i-j}),\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{2.12}$$

来确定，式中C，H分别如定理1中所定义。此时矩阵R可以表示为

$$R=\begin{cases}1 & m=1\\ T^{-T}\overline{R}T^{-1}, \quad T=\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & 0\\ U & & & \\ & & I_{m-1} & \end{array}\right), \overline{R}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \sigma & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma\end{pmatrix}, \sigma\to+\infty & m>1\end{cases} \tag{2.13}$$

证 由定理1可知，在系统满足方程（2.13）的条件下，系统的最优控制器为

$$\begin{cases}K=U\overline{K}, \quad \overline{K}=b^TP & (2.14a)\\ A^TP+PA-Pbb^TP+\overline{Q}=0 \qquad \overline{Q}=Q|_{\sigma\to\infty} & (2.14b)\end{cases}$$

当 Q 使得方程（2.4）成立时有[1,2]

$$P_c(s)P_c(-s)-P_0(s)P_0(-s)=P_0(s)P_0(-s)b^T(-sI-A^T)^{-1}Q(sI-A)^{-1}b \tag{2.15}$$

其中 $P_0(s)(sI-A)^{-1}b$ 又可以展开为

$$\begin{aligned}P_0(s)(sI-A)^{-1}b&=(s^{n-1}+\alpha_{n-1}s^{n-2}+\cdots+\alpha_2s+\alpha_1)b\\ &\quad+(s^{n-2}+\alpha_{n-2}s^{n-3}+\cdots+\alpha_3s+\alpha_2)Ab\\ &\quad+\cdots+(s+\alpha_{n-1})A^{n-2}b+A^{n-1}b\\ &=CH(1 \quad s \quad \cdots \quad s^{n-1})^T\end{aligned} \tag{2.16}$$

将此方程代入（2.15），则有

$$P_c(s)P_c(-s)-P_0(s)P_0(-s)=(1 \quad -s \quad \cdots \quad (-s)^{n-1})H^TC^TQCH(1 \quad s \quad \cdots \quad s^{n-1})^T \tag{2.17}$$

定义
$$\widetilde{Q}=H^TC^TQCH=\mathrm{diag}(\widetilde{Q}_{11} \quad \widetilde{Q}_{22} \quad \cdots \quad \widetilde{Q}_{nn})$$
则可以得到方程（2.11）。此时方程（2.17）变为

$$\begin{aligned}P_c(s)P_c(-s)-P_0(s)P_0(-s)&=\sum_{\tau=1}^{n}(-1)^{\tau-1}\widetilde{Q}_{\tau\tau}s^{2(\tau-1)}\\ &=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2i}(-1)^j(\overline{\alpha_j\alpha_{2i-j}}-\alpha_j\alpha_{2i-j})s^{2i}\end{aligned} \tag{2.18}$$

令 $\tau=i+1$，由方程（2.18）中的系数便可以得到方程（2.12）。定理2证毕。

由定理2的结果可以看出，使得 $\widetilde{Q}_{ii}\geqslant 0$ 时的 λ_{ci} 均满足 $\lambda_{ci}\in\mathscr{C}^-_{\mathrm{opt}}$。

三、离散时间系统的最优调节器及矩阵Q、R

有了连续时间系统的结论之后，对于解决离散时间系统中相对应的问题就变得极为方便。但是，由于某些地方的本质区别，在此我们对离散时间系统中的问题另作讨论。

定理 3 考虑离散时间系统

$$X_{k+1}=AX_k+Bu_k \tag{3.1}$$

式中 $A\in\mathscr{R}^{n\times n}$，$B\in\mathscr{R}^{n\times m}$，$X_k$ 及 u_k 均为适当维数的状态和控制矢量．如果存在矢量 $U\in\mathscr{R}^{m\times 1}$ 使得系统满足 $\mathrm{Rank}C=n$，则系统的最优状态反馈系数矩阵 K 可以取为

$$K=U\overline{K},\quad \overline{K}=b^TP \tag{3.2}$$

式中的矩阵 P 为代数 Riccati 方程

$$P=A^TPA-Pb(1+b^TPb)^{-1}b^TP+Q \tag{3.3}$$

的解，其中 $b=BU$。

证　仿照定理 1 的证明进行，在此略．

在定理 3 中，若期望的闭环特征值给定为 z_{ci}，则方程（3.2）中的矩阵 $\overline{K}$ 可以表示为

$$\overline{K}=(\overline{a}_0-a_0\ \cdots\ \overline{a}_{n-1}-a_{n-1})(CH)^{-1} \tag{3.4}$$

式中 $C=(b\quad Ab\ \cdots\ A^{n-1}b)$，$b=BU$

$$H=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_n & & & 0 \end{pmatrix}$$

a_i，$\overline{a}_i$，$i=1,2,\cdots,n$，分别为系统的开、闭环特征多项式 $\Psi_0(z)$，$\Psi_c(z)$的系数

$$\Psi_0(z)=\det(zI-A)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,\quad a_n=1 \tag{3.5}$$

$$\Psi_c(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_{ci})=z^n+\overline{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\overline{a}_1z+\overline{a}_0,\quad \overline{a}_n=1 \tag{3.6}$$

为了保证 $Q\geqslant 0$ 的存在性，z_{ci} 要类似于 λ_{ci} 的定义．下面的定理将直接给出 Q 与 $\overline{a}_i$，a_i，C，H 之间的关系．

定理 4　设系统满足定理 3 中所述之条件，且 $a_i\neq 0$，当系统的二次型性能指标函数为

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(X_k^TQX_k+u_k^TRu_k)\qquad Q\geqslant 0,\ R>0 \tag{3.7}$$

且式中的矩阵 R 由方程（2.13）给定时，则使得闭环系统的特征值为 z_{ci} 的加权矩阵 Q 为

$$Q=C^{-T}\mathrm{diag}(Q_{11}\quad Q_{22}\ \cdots\ Q_{nn})C^{-1} \tag{3.8}$$

其中 Q_{ii}，$i=1,2,\cdots,n$，由方程

$$(1\quad Q_{11}\ \cdots\ Q_{nn})^T=\frac{a_0}{\overline{a}_0}H_1^{-1}\mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_0}\quad\frac{1}{a_1}\ \cdots\ \frac{1}{a_n}\right)H_0^{-1}H_c\begin{pmatrix}\overline{a}_0\\ \overline{a}_1\\ \vdots\\ \overline{a}_0\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

给出。式中的H_1，H_0，H_c分别定义如下

$$H_0=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & & ⋰ & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_n & & & 0 \end{pmatrix},\quad H_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & ⋰ & \\ \vdots & ⋰ & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix},\quad H_c=\begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_n \\ \bar{a}_1 & & ⋰ & \\ \vdots & ⋰ & & \\ \bar{a}_n & & & 0 \end{pmatrix}$$

证 仿效定理2的证明，我们有

$$(1+b^TPb)\Psi_c(z)\Psi_c(z^{-1})-\Psi_0(z)\Psi_0(z^{-1})$$
$$=\Psi_0(z)\Psi_0(z^{-1})b^T(z^{-1}I-A^T)^{-1}Q(zI-A)^{-1}b$$

且 $$\Psi_0(z)\,(zI-A)^{-1}b=CH\begin{pmatrix}1\\ z\\ \vdots\\ z^{n-1}\end{pmatrix}\triangleq\sum_{i=0}^{n-1}M_iz^i \tag{3.11}$$

式中 $$M_i=C(a_{i+1}\ \cdots\ a_n\ 0\ \cdots\ 0)^T\triangleq CA_{i+1},\quad i=0,1,\cdots,n-1 \tag{3.12}$$

所以 $$\Psi_0(z)\Psi_0(z^{-1})b^T(z^{-1}I-A^T)^{-1}Q(zI-A)^{-1}b=\left(\sum_{i=0}^{n-1}M_i^Tz^{-i}\right)Q\left(\sum_{j=0}^{n-1}M_jz^j\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-k}M_{n-k-j}^TQM_{n-j}z^k+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-k}M_{n-j}^TQM_{n-k-j}z^{-k} \tag{3.13}$$

式中当$n\leqslant\tau<0$时，$M\tau=0$。又

$$(1+b^TPb)\phi_c(z)\phi_c(z^{-1})-\phi_0(z)\phi_0(z^{-1})$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}[(1+b^TPb)\bar{a}_{n-k-j}\bar{a}_{n-j}-a_{n-k-i}a_{n-i}]z^k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}[(1+b^TPb)\bar{a}_{n-j}\bar{a}_{n-k-j}-a_{n-j}a_{n-k-j}]z^{-k} \tag{3.14}$$

让方程（3-13）和（3-14）中的各项系数相等，我们有

$$\sum_{j=1}^{n-k}M_{n-k-j}^TQM_{n-j}=\sum_{j=0}^{n-k}[(1+b^TPb)\bar{a}_{n-k-j}\bar{a}_{n-j}-a_{n-k-j}a_{n-k} \tag{3.15}$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

当$k=n$时，由方程（3.15）可知

$$\bar{a}_0(1+b^TPb)=a_0 \tag{3.16}$$

令$n-j=i$，方程（3.15）变为

$$\sum_{i=k}^{n-1}M_{i-k}^TQM_i=\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{a_0}{\bar{a}_0}\bar{a}_i\bar{a}_{i-k}-a_ia_{i-k}\right),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \tag{3.17}$$

将方程（3.12）代入方程（3.17）有

$$\sum_{i=k}^{n-1} A_{i-k+1}^T \overline{Q} A_{i+1} = \sum_{i=k}^{n}\left(\frac{a_0}{\overline{a}_0}\overline{a}_i\overline{a}_{i-k} - a_i a_{i-k}\right),\quad k=0,1\cdots,n-1 \tag{3.18}$$

式中

$$\overline{Q} = G^T Q G \triangleq \mathrm{diag}(Q_{11}\quad Q_{22}\quad \cdots Q_{nn}) \tag{3.19}$$

由此可以求得方程（3.8）.将方程（3.18）展开有

$$\sum_{i=k}^{n-1} A_{i-k+1}^T \overline{Q} A_{i+1}$$

$$= (\underbrace{0\cdots 0 1}_{k+1} 0\cdots 0)\left\{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & \cdots\cdots a_n & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & a_n \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} + \cdots\right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} a_n & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ \vdots \\ Q_{nn} \end{pmatrix}\quad k=0,\ 1,\cdots,n-1 \tag{3.20}$$

在方程中，因为

$$\begin{pmatrix} a_i & \cdots a_n & 0\cdots 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i & & & 0 \\ & a_n & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ a_i & \ddots & & \\ 0 & a_n & 0\cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

所以，方程（3.20）可以表示为

$$\sum_{i=k}^{n-1} A_{i-k+1}^T \overline{Q} A_{i+1}$$

$$= (\overbrace{0\cdots 0 1}^{k+1} 0\cdots 0)\begin{pmatrix} a_1 & \cdots\cdots & a_n \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_n & \cdots\cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{nn} \end{pmatrix},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1 \tag{3.21}$$

$$= (\overbrace{0\cdots 0 1}^{k+1} 0\cdots 0) H_0 \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} 0 \\ Q_{11} \\ \vdots \\ Q_{nn} \end{pmatrix},\quad k=0,\ 1,\ \cdots n \tag{3.22}$$

另一方面，方程（3.18）的右边可以表示为

$$\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{a_0}{\bar a_0}\overline{a}_i\overline{a}_{i-k}-a_ia_{i-k}\right)$$

$$=(\overbrace{0\cdots0\,1}^{k+1}0\cdots0)\left\{\frac{a_0}{\bar a_0}\begin{pmatrix}\bar a_0 & \cdots\cdots & \bar a_{n-1} & \bar a_n\\ \vdots & & & \\ \bar a_{n-1} & \bar a_n & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar a_0\\ \vdots\\ \bar a_n\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-\begin{pmatrix}a_0 & \cdots\cdots a_{n-1} & a_n\\ \vdots & & \\ a_{n-1} & a_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right\},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n \tag{3.23}$$

$$=(\overbrace{0\cdots01}^{k+1}0\cdots0)\left[\frac{a_0}{\bar a_0}H_c\,(\bar a_0\cdots\bar a_n)^T-H_0(a_0\cdots a_n)^T\right],\quad k=0,1,\cdots n \tag{3.24}$$

显然，方程（3.21）的右边与方程（3.23）的右边相等时，方程（3.22）的右边与方程（3.24）的右边也相等。所以，当$k=0$，1，…，n，时，我们有

$$H_0\mathrm{ding}(a_0\ \ a_1\ \ \cdots a_n)H_1(0\ \ Q_{11}\cdots Q_{nn})^T$$

$$=\frac{a_0}{\bar a_0}H_c(\bar a_0\ \ \bar a_1\cdots\bar a_n)^T-H_0(a_0\cdots a_n)^T \tag{3.25}$$

当$a_i\neq0$，$i=1$，2，…，n时，由方程（3.25）便可以求得方程（3.9）.定理4证毕.

四、举　　例

考虑一可控系统

$$\dot X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u,\quad n=2,\quad m=1$$

$$P_0(s)=\det(sI-A)=s^n+2s+1$$

$$P_c(s)=(s-\lambda_{c1})(s-\lambda_{c2})=s^2-(\lambda_{c1}+\lambda_{c2})s+\lambda_{c1}\lambda_{c2}$$

$C=(b\quad Ab)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，且满秩. $H=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，取$\lambda_{c1}=-2$，$\lambda_{c2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$K=\overline{K}=(\lambda_{c1}\lambda_{c2}-1\quad-\lambda_{c1}\lambda_{c2}-2)(GH)^{-1}=(\sqrt{2}-1\quad\frac{\sqrt{2}}{2})$$

此时我们可以求得

$$\widetilde{Q}_{11}=\bar\alpha_0^2-\alpha_0^2=\lambda_{c1}^2\ \lambda_{c2}^2-1=1>0$$

$$\widetilde{Q}_{22}=-2(\bar\alpha_0\,\bar\alpha_2-\alpha_0\alpha_2)+(\bar\alpha_1^2-\ \alpha_1^2)=\lambda_{c1}^2+\lambda_{c2}^2-2=2.5>0$$

可见矩阵K是系统的最优状态反馈系统矩阵.不难验证,将$Q=(GH)^{-T}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2.5\end{pmatrix}(GH)^{-1}$
$=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2.5\end{pmatrix}$和$R=1$代入方程(1.4)可以求得

$$P=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1\\ \sqrt{2}-1 & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

由此可以求得 $K=\overline{K}=b^T P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，它与前面结果一致.

当$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$时，显然存在$U$使得($A$，$BU$)可控.取$U=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，

则$b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.此时由方程(2.4)可知

$$K=U\overline{K}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

且 $R=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_2+1 & \sigma_2\\ \sigma_2 & \sigma_2\end{pmatrix}$，$\sigma_2\to\infty$.矩阵$\overline{Q}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2.5\end{pmatrix}$.由此可见，当系统存在$U$使得$\mathrm{Rank}C=n$时，系统的最优控制器的设计变成了系统$(A,b)$的最优控制器的设计问题了，所以设计起来是十分方便的.且能由此配置系统的闭环极点.

下面简单地分析一下σ_2为有限值时的结果.取$\sigma_1=1,\sigma_2=100$,为了保证代数Riccati方程(1.4)中的解P不变，令

$$Q=\overline{Q}+\widetilde{Q},\quad \widetilde{Q}=\frac{1}{\sigma_2}\begin{pmatrix}P_{11}\\P_{22}\end{pmatrix}(P_{11}\quad P_{22})$$

显然P，Q，R满足方程(1.4).所以，系统此时的最优状态反馈系统矩阵$K_0=R^{-1}B^TP$
$=K+\dfrac{1}{100}\begin{pmatrix}0 & 0\\2\sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1\end{pmatrix}$，其中$K$为$\sigma_2\to\infty$时的最优解，它导致的闭环极点为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-2$，而$\lambda(A-BK_0)=\{-2-0.0368,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0.0185\}$.值得注意的是，当$\sigma_i$为有限正数时，$K=R^{-1}B^TP$仍然是系统的最优态反馈系数矩阵(见定理1的证明)只是此时的闭环系统的特征值不是期望值.

五、结　语

本文所给出的结果具有解析结构是本文的主要特点.通矩阵R所取到的变换作用把

MI 系统与 SI 系统有机地结合起来，保证了系统控制器的最优不变性．问题是，如果系统不存 U 使得 $\mathrm{Rank}G=n$，则对于这类系统的LQ最优控制之逆问题有待于进一步研究．

参 考 文 献

〔1〕 Kalman, R. E., When is a Linear Control System Optimal, J. Basic Eng. Trans. ASME, 86, 5, (1964), 51—56.

〔2〕 Anderson, B. D. O., and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Englewood cliffs, NJ: Prentice Hall, (1971), Chapter 7.

〔3〕 何长安，加深对最优控制的理解，信息与控制，16，1，(1987)，60—61.

〔4〕 Solheim, O. A., Design of Optimal Control Systems with Prescribed Eigenvalues, Int. J. Control, 15, 1, (1972), 143—160.

〔5〕 Graupe, D., Derivation of Weighting Matrices Towards Satisfying Eigenvalue Requirements, Int. J. Control, 16, 4, (1972), 881—888.

〔6〕 Eastman, W. L., and Bossi, J. A., Design of Linear Quadratic Regulators with Assigned Eigenstructure, Int. J. Control, 39, 3, (1984), 731—742.

〔7〕 Lee, T. T., and Liaw, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance, Int. J. Control, 43, 2, (1986), 233—246.

Study on the Inverse Problem of LQ Optimal Control

Wang Yaoqing, Lu Yongzai

(Department of Chemical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, the relation between the weighting matrix Q in a linear quadratic performance index and the coefficients of the closed-loop characteristic polynomial, Open-loop characteristic polynomial and the coefficients matrices A, B of a system is developed via appropriately choosing the other weighting matrix R in the LQ performance index. With the result, Q can readily be determined if an open-loop system and its desired Optimal closed-loop eigenvalues are given. Besides, the Optimal state feedback gain matrix for the system under study is also given through using the proposed results.

Key words——Optimal control; Weightimg matrices; LQ inverse problem; Eigenvalues; Characteristic polynomials.