

# 大系统模型降阶的直接离散化方法

桂世和

(苏州丝绸工学院机电系)

## 摘 要

本文从频域最小二乘拟合出发,提出了高阶线性定常时间连续数学模型降阶为低阶线性定常时间离散模型的直接方法。本方法算法简单,便于编制计算机辅助设计程序,使降阶设计高度程序化,概念明确,在宽广的频带内具有较高的拟合精度,易为工程实际所应用。

**关键词:** 大系统; 降阶系统; 连续定常模型; 离散定常模型。

## 一、引 言

大系统模型降阶或系统简化,目的是寻求一种数学方法,把高维向量空间(或高阶传递函数)拟合(或缩减)到一个尽可能保留了原系统主要特征的低维子空间(或低阶传递函数)。由此所得到的在某种最优意义下逼近原系统的低阶数学模型,易于为工程实际所应用。

在大系统模型降阶领域中,国内外学者已进行了大量的研究并发表了许多论文,在降阶机理和降阶算法上进行了很多工作<sup>[1], [2], [3]</sup>。但总的来说,降阶的途径<sup>[4]</sup>基本上都是高阶的时间连续动态系统简化为低阶的时间连续动态系统;或是高阶的时间离散动态系统简化为低阶的时间离散动态系统。

在采用电子数字计算机来实现各种控制策略的各种实际工程应用中,数学描述的方法通常是离散时间方式,即离散状态方程或 $z$ 传递函数阵。但需要降阶的实际大系统模型又往往是高阶时间连续动态系统。所以模型降阶的途径通常是:(1)高阶时间连续模型先降阶至低阶时间连续模型,再离散化为低阶时间离散模型;(2)高阶时间连续模型先离散化为高阶时间离散模型,再降阶至低阶时间离散模型。本文研究了从高阶时间连续模型直接降阶至低阶时间离散模型的较理想的工程方法。

## 二、降阶准则

时间连续系统的模型降阶归结为给出高阶线性定常时间连续系统的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ y &= CX \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $X \in R^n$ ,  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^p$ ,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为相应维数的常数矩阵; 或给出高阶线性定常时间连续系统的传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \frac{Q_0 + Q_1s + Q_2s^2 + \dots + Q_{n-2}s^{n-2} + Q_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n} \quad (2)$$

式中分母为系统的特征多项式,  $\forall Q_i$  为  $p \times m$  常量矩阵。欲求的低阶简化模型用状态方程表示为

$$\dot{Z} = FZ + GU \quad (3)$$

$$Y_m = HZ$$

式中  $Z \in R^r$ ,  $p \leq r < n$ ,  $Y_m \in R^p$ ,  $F$ 、 $G$ 、 $H$  为相应维数的常量矩阵; 低阶简化模型也可用传递函数矩阵表示

$$P(s) = \frac{D_0 + D_1s + D_2s^2 + \dots + D_{q-1}s^{q-1} + D_qs^q}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_{k-1}s^{k-1} + e_ks^k} \quad (4)$$

式中  $q \leq k < n$ , 分母为降阶模型的特征多项式,  $\forall D_i$  为  $p \times m$  常量矩阵。

而时间离散系统的模型降阶可归结为给出高阶线性定常时间离散系统状态方程

$$X(k+1) = \tilde{A}X(k) + \tilde{B}U(k) \quad (5)$$

$$Y(k+1) = \tilde{C}X(k)$$

式中  $X \in R^n$ ,  $U \in R^m$ ,  $Y \in R^p$ ,  $\tilde{A}$ 、 $\tilde{B}$ 、 $\tilde{C}$  为相应维数的常量矩阵; 或给出高阶的  $z$  传递函数矩阵

$$G(z) = \tilde{C}(zI - A)^{-1}\tilde{B}$$

$$= \frac{\tilde{Q}_0 + \tilde{Q}_1z^{-1} + \tilde{Q}_2z^{-2} + \dots + \tilde{Q}_{n-2}z^{-(n-2)} + \tilde{Q}_{n-1}z^{-(n-1)}}{a'_0 + a'_1z^{-1} + a'_2z^{-2} + \dots + a'_{n-1}z^{-(n-1)} + a'_nz^{-n}} \quad (6)$$

式中分母为系统的特征多项式,  $\forall \tilde{Q}_i$  为  $p \times m$  常量矩阵。欲求的系统时间离散降阶模型为

$$Z(k+1) = \tilde{F}Z(k) + \tilde{G}U(k) \quad (7)$$

$$Y_m(k+1) = \tilde{H}Z(k)$$

式中  $Z \in R^r$ ,  $p \leq r < n$ ,  $Y_m \in R^p$ ,  $\tilde{F}$ 、 $\tilde{G}$ 、 $\tilde{H}$  为相应维数的常量矩阵; 简化模型也可写成  $z$  传递函数矩阵的形式

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{\tilde{D}_0 + \tilde{D}_1 z^{-1} + \tilde{D}_2 z^{-2} + \dots + \tilde{D}_{q-1} z^{-(q-1)} + \tilde{D}_q z^{-q}}{e'_0 + e'_1 z^{-1} + e'_2 z^{-2} + \dots + e'_{h-1} z^{-(h-1)} + e'_h z^{-h}} \\
 &= \frac{R_0 + R_1 z^{-1} + R_2 z^{-2} + \dots + R_{q-1} z^{-(q-1)} + R_q z^{-q}}{1 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_{h-1} z^{-(h-1)} + g_h z^{-h}} \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中  $q \leq k < n$ , 分母为降阶模型的特征多项式,  $\forall D_i, R_i$  为  $p \times m$  常量矩阵。

下面我们在频域中来研究如何将式(2)表示的高阶时间连续线性定常系统直接简化为以式(8)描述的低阶时间离散线性定常系统。在原系统传递函数矩阵中, 以  $s = j\omega$  代入, 得高阶 MIMO 系统的频率特性

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{Q_0 + Q_1(j\omega) + Q_2(j\omega)^2 + \dots + Q_{n-2}(j\omega)^{n-2} + Q_{n-1}(j\omega)^{n-1}}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + a_n(j\omega)^n} \\
 &= A(\omega) + jB(\omega) \quad (9)
 \end{aligned}$$

$A(\omega)$  和  $B(\omega)$  为  $p \times m$  变量  $\omega$  函数矩阵。系统降阶成离散系统后的  $z$  传递函数矩阵式(8)中  $z$  以  $e^{j\omega T}$  代入, 则得到高阶连续系统的离散简化模型的频率特性为

$$P(e^{j\omega T}) = \frac{R_0 + R_1(e^{-j\omega T}) + R_2(e^{-j^2\omega T}) + \dots + R_q(e^{-jq\omega T})}{1 + g_1(e^{-j\omega T}) + g_2(e^{-j^2\omega T}) + \dots + g_h(e^{-jh\omega T})} \quad (10)$$

$T$  为离散采样周期。将上式中的  $e^{-j^i\omega T}$  欧拉展开得

$$P(e^{j\omega T}) = \frac{\Phi(\omega) + j\Theta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\tau(\omega)} \quad (11)$$

式中  $\sigma(\omega)$  和  $\tau(\omega)$  是  $\omega$  的函数,  $\Phi(\omega)$  和  $\Theta(\omega)$  是  $p \times m$  变量  $\omega$  函数矩阵。且

$$\Phi(\omega) = R_0 + R_1 \cos(\omega T) + R_2 \cos(2\omega T) + \dots + R_q \cos(q\omega T) \quad (12)$$

$$\Theta(\omega) = -[R_1 \sin(\omega T) + R_2 \sin(2\omega T) + \dots + R_q \sin(q\omega T)] \quad (13)$$

$$\sigma(\omega) = 1 + g_1 \cos(\omega T) + g_2 \cos(2\omega T) + \dots + g_h \cos(k\omega T) \quad (14)$$

$$\tau(\omega) = -[g_1 \sin(\omega T) + g_2 \sin(2\omega T) + \dots + g_h \sin(k\omega T)] \quad (15)$$

频域中高阶连续系统频率特性  $G(j\omega)$  和低阶离散简化模型频率特性  $P(e^{j\omega T})$  间在频率  $\omega$  处的误差  $E(\omega)$  为

$$E(\omega) = G(j\omega) - P(e^{j\omega T}) \quad (16)$$

$E(\omega)$  是  $\omega$  的复函数矩阵。直接使  $\int E^2(\omega) d\omega$  或  $\int E^T(\omega) R E(\omega) d\omega$  极小化求简化模型的各项系数和系数矩阵, 要涉及解非线性复函数矩阵代数方程组, 甚难求解。为此, 我们将式(9)、(10)代入式(16), 则有

$$E(\omega) = [A(\omega) + jB(\omega)] - \frac{\Phi(\omega) + j\Theta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\tau(\omega)}$$

$$[\sigma(\omega) + j\tau(\omega)]E(\omega) = [A(\omega) + jB(\omega)][\sigma(\omega) + j\tau(\omega)] - [\Phi(\omega) + j\Theta(\omega)]$$

令  $\tilde{E}(\omega) = [\sigma(\omega) + j\tau(\omega)]E(\omega)$ , 定义误差函数  $J = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega$  为模型降阶准则函

数, 即

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| [\mathbf{A}(\omega) + j\mathbf{B}(\omega)][\sigma(\omega) + j\tau(\omega)] - [\Phi(\omega) + j\Theta(\omega)] \right|^2 d\omega \\
 &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left\{ [\mathbf{A}(\omega)\sigma(\omega) - \mathbf{B}(\omega)\tau(\omega) - \Phi(\omega)]^2 \right. \\
 &\quad \left. + [\mathbf{A}(\omega)\tau(\omega) + \mathbf{B}(\omega)\sigma(\omega) - \Theta(\omega)]^2 \right\} d\omega \quad (17)
 \end{aligned}$$

式中  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  是原高阶系统降阶简化模型需拟合的频率范围. 对式 (17) 实行最小二乘, 就可得到降阶离散模型的各系数及系数矩阵.

### 三、降阶算法

将式 (12) 至 (15) 代入式 (17), 实施最小二乘. 分别对  $\mathbf{R}_i (i=1, 2, \dots, q)$  和  $g_j (j=0, 1, 2, \dots, k)$  求偏导数, 并令其结果等于零. 得  $(k+q+1)$  个线性矩阵代数方程.

$$\frac{\partial J}{\partial g_j} = 0 \quad j=0, 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{R}_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, q$$

整理后可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & \dots & T_{0q} & \mathbf{W}_{01} & \mathbf{W}_{02} & \dots & \mathbf{W}_{0k} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1q} & \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \dots & \mathbf{W}_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{q0} & T_{q1} & T_{q2} & \dots & T_{qq} & \mathbf{W}_{q1} & \mathbf{W}_{q2} & \dots & \mathbf{W}_{qk} \\ \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \dots & \mathbf{U}_{1q} & \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} & \dots & \mathbf{V}_{1k} \\ \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \dots & \mathbf{U}_{2q} & \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} & \dots & \mathbf{V}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{U}_{k0} & \mathbf{U}_{k1} & \mathbf{U}_{k2} & \dots & \mathbf{U}_{kq} & \mathbf{V}_{k1} & \mathbf{V}_{k2} & \dots & \mathbf{V}_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_q \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_q \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中

$$T_{ij} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ \cos[(i+j)\omega T] \} d\omega, \quad \begin{matrix} i=0 \text{ 至 } q \\ j=1 \text{ 至 } k \end{matrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ \mathbf{B}(\omega) \sin[(i-j)\omega T] - \mathbf{A}(\omega) \cos[(i+j)\omega T] \} d\omega, \quad \begin{matrix} i=0 \text{ 至 } q \\ j=1 \text{ 至 } k \end{matrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{U}_{ij} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ \mathbf{B}(\omega) \sin[(j-i)\omega T] - \mathbf{A}(\omega) \cos[(i+j)\omega T] \} d\omega, \quad \begin{matrix} i=0 \text{ 至 } q \\ j=1 \text{ 至 } k \end{matrix} \quad (22)$$

$$V_{ij} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ [A^2(\omega) + B^2(\omega)] [\cos[(i+j)\omega T]] \} d\omega, \quad \begin{matrix} i=0 \text{ 至 } q \\ j=1 \text{ 至 } k \end{matrix} \quad (23)$$

$$Z_i = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ A(\omega) \cos(i\omega T) - B(\omega) \sin(i\omega T) \} d\omega, \quad i=0 \text{ 至 } q \quad (24)$$

$$F_j = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \{ -[A^2(\omega) + B^2(\omega)] \cos(j\omega T) \} d\omega, \quad j=1 \text{ 至 } k \quad (25)$$

根据方程式(19)至(25),就可以解得降阶离散模型式(8)中的分母多项式各系数 $g_j$ 及分子多项式各系数矩阵 $R_i$ .

#### 四、实例及比较

按照方程式(20)至(25)以及方程式(19),作者编制了计算机辅助降阶设计程序.运行程序时需输入的信息是:拟降阶的高阶传递函数矩阵,要求的低阶模型阶次 $q, k$ ,采样周期 $T$ 以及拟合频率范围 $\omega_1, \omega_2$ ;程序运行后的输出是降阶离散模型的各项系数 $g_j$ 和系数矩阵 $R_i$ .

为了更清晰地比较降阶拟合精度,这里以一个 $p=1, m=1$ 的SISO系统为例;对于 $p>1, m>1$ 的MIMO系统只是单纯的计算工作量加大,程序运行时间加长.

下面的例子在很多论述大系统模型降阶的文献<sup>[5, 6, 7]</sup>中均被讨论过,是一具有相当难度的算例,频率特性曲线复杂,其阶跃响应是一个波浪形上升的曲线.

**例** 已知(7.8)阶线性定常连续系统的传递函数为

$$G_{7.8}(s) = K \frac{842597.95 + 1890443.1s + 90812.05s^2 + 241544.69s^3}{37752.826 + 149172.19s + 173383.58s^2 + 67556.683s^3} \\ + \frac{45575.952s^4 + 4843.8072s^5 + 429.252s^6 + 19.82s^7}{18110.567s^4 + 2913.8638s^5 + 358.4295s^6 + 30.41s^7 + s^8}$$

式中 $K=0.045$ ,求其(3.3)阶降阶离散模型.

**解:**选择离散采样周期 $T=0.2\text{sec}$ ,拟合频率范围为 $\omega_1=0\text{rad/sec}$ , $\omega_2=10\text{rad/sec}$ .运行编制好的计算机辅助降阶设计程序,输入相应的初始信息,程序运行结果为

$$P_{3.3}(z) = \frac{0.06511743 + 0.0477312z^{-1} + 0.03918493z^{-2} + 0.02730247z^{-3}}{1 - 1.272495z^{-1} + 1.247072z^{-2} - 0.7921536z^{-3}}$$

高阶连续模型频率特性 $G_{7.8}(j\omega)$ 和降阶离散模型频率特性 $P_{3.3}(e^{j\omega T})$ 的Bode图见图1.从图中可以看出,模型间的拟合在频率域的低中高各频段均具有令人满意的逼近程度.

对于上述例子,不少降阶方法(如Pade法,连分式法)对它都失败. Shief等<sup>[5]</sup>(1976年)和Marshall<sup>[6]</sup>(1980年)分别用不同的改进型Pade'法,对上例高阶系统进行了简化,降阶模型为(3.4)阶低阶连续传递函数:

$$G_{3 \cdot 4}^{shi}(s) = \frac{356.99068 + 647.81099s + 67.114913s^2 - 1.1487882s^3}{15.9950625 + 56.340125s + 47.5545s^2 + 1.91s^3 + s^4}$$

$$G_{3 \cdot 4}^{mar}(s) = \frac{6.3176(s^2 + 1.968s + 74.756)(0.1695s + 1)}{(s^2 + 0.7s + 46.3625)(s + 0.46)(0.04223s + 1)}$$

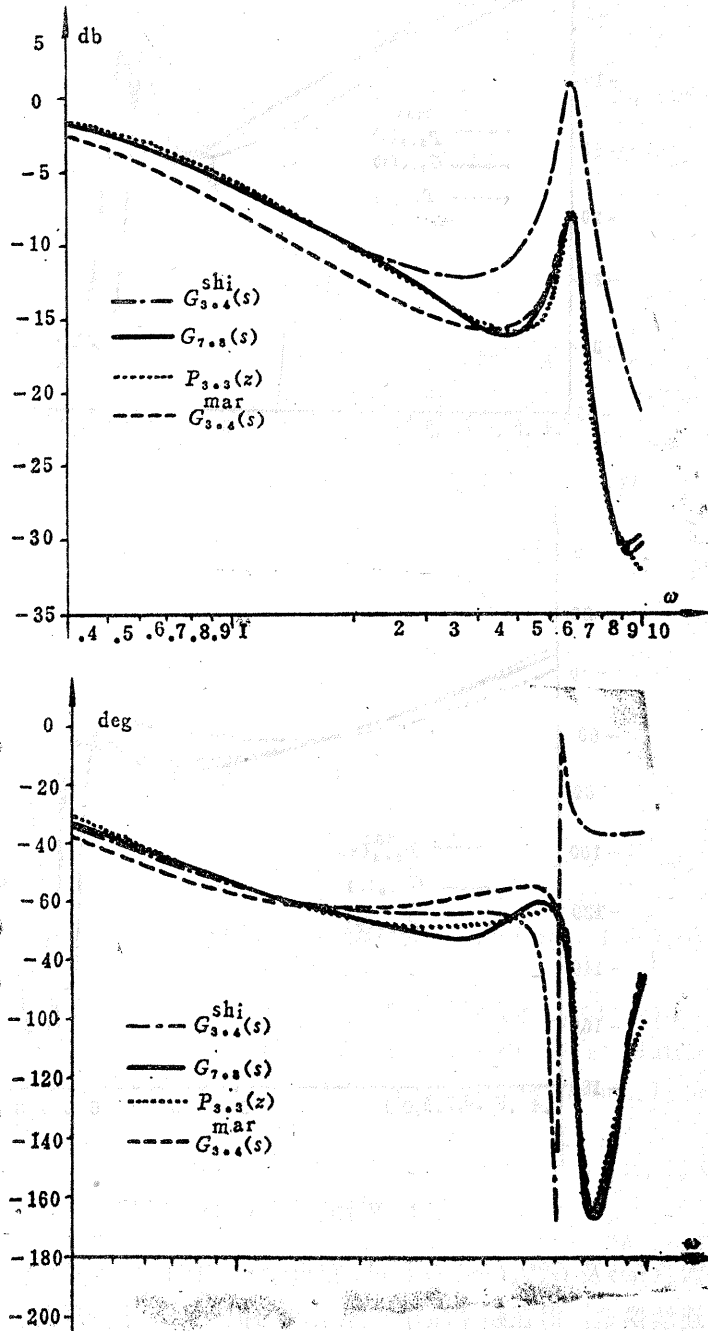


图 1 降阶模型的频域比较

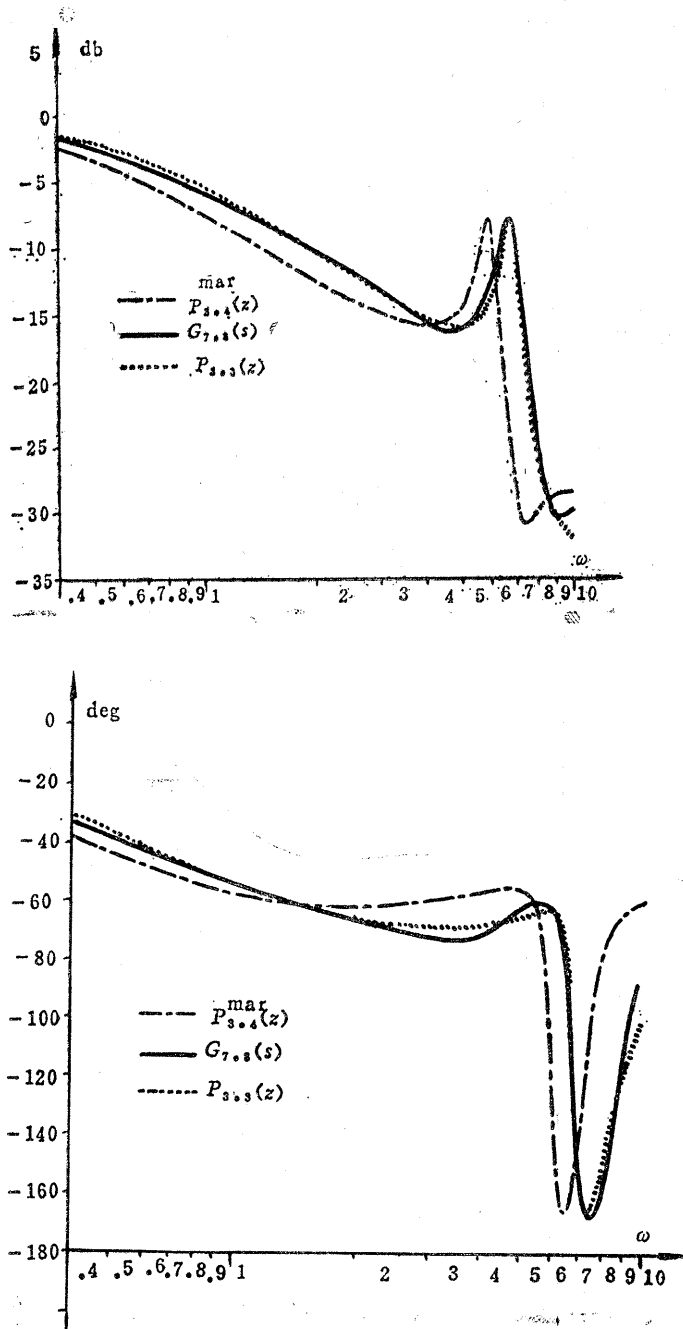


图 2 离散降阶模型的频域比较

频率特性  $G_{3.4}^{hI}(j\omega)$  及  $G_{3.4}^{marI}(j\omega)$  的 Bode 图也绘制在图 1 中, 它们虽然是高阶连续模型降阶至低阶连续模型, 但在频率域中和原系统的拟合并不十分理想。

若将上述的低阶连续模型再转换成低阶离散模型, 如用双线性变换法 (Tustin

法),也取采样周期  $T=0.2\text{sec}$ , 把  $G_{3.4}^{\text{maI}}(s)$  转换成  $z$  传递函数. 则以  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

代入, 得

$$P_{4.4}^{\text{maI}}(z) = \frac{1.4578 + 0.7033z^{-1} + 0.5058z^{-2} + 0.961z^{-3} - 0.2998z^{-4}}{1 - 1.2054z^{-1} + 0.8921z^{-2} - 0.2006z^{-3} - 0.3366z^{-4}}$$

其频率特性  $P_{4.4}^{\text{maI}}(e^{j\omega T})$  的 Bode 曲线见图2. 在图2中还给出了  $G_{7.8}(j\omega)$  和  $P_{3.3}(e^{j\omega T})$  的 Bode 曲线. 显然, 由此低阶连续模型再转换而来的低阶离散模型在频域中和原高阶连续系统相差甚远, 很难为工程实际应用所接受.

## 五、结 束 语

本文讨论了频域拟合下的大系统时间连续模型直接离散化降阶方法, 是一个较好的系统降阶实用工程方法. 其主要特点是: 算法简易清晰, 概念明确, 工程性强, 具有理想的拟合精度, 易为工程设计人员所接受; 编制好计算机辅助设计程序后, 通用性好, 使用方便. 作者在自己编制的程序中, 也运行过几个多输入多输出系统的例子, 同样得到了满意的拟合效果.

在降阶设计时, 如需在某频段进一步提高拟合精度, 则降阶准则函数可采用二次型加权函数, 其降阶算法类同.

## 参 考 文 献

- [1] 万百五、吴受章, 大系统的模型简化, 自动化学报, 6, (1980), 57—66.
- [2] 张启人, 大系统模型降阶理论, 信息与控制, 4, (1980), 2—22.
- [3] 钱钟韩、周其鉴、胡锡恒, 模型降阶的机理探讨及几种新方法, 自动化学报, 1, (1985), 44—51.
- [4] 吕勇哉, 工业过程模型化及计算机控制, 化学工业出版社, 北京, (1986), 73—84.
- [5] Shief, L. S., et al., Two Methods for Simplifying Multivariable System with Various Numbers of Inputs and Outputs, Int. J. Systems Sci., 7, (1976), 501—512.
- [6] Marshall, S. A., The Design of Reduced-order System, Int. J. Contr., 31, (1980), 677—690.
- [7] 胡锡恒, 动态系统的频率点拟合建模, 自动化学报, 4, (1987), 265—271.



## A Method for Directly Reducing Large-scale Continuous System to Discrete Model

Gui Shihe

(Department of Mechanical and Electrical Engineering, Suzhou  
Institute of Silk Textile Technology)

### Abstract

This paper presents a method for directly reducing high-order linear Continuous time-invariant model to low-order linear discrete time-invariant model. The method is Computationally simple and easy to be programmed on Computer. The main features of the method are clarity in Concept and relatively high precision in frequency domain and so can be applied to engineering problems.

**Key words**—Large-scale system; Reduced-order system; Continuous time-invariant model; Discrete time-invariant model.