第6卷 第4期 控制理论与应用 Vol. 6, No. 4
1989年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1989

关于ITAE的敛散性问题

高越农

（武汉钢铁学院自动化系）

摘　要

本文探讨了性能指标ITAE的敛散性问题，给出了从复域判定其敛散性的充分、必要条件，从而改进了参考文献〔1〕就同一问题给出的结果.

关键词：线性系统；ITAE准则；收敛性.

一、引　言

在1986年第3卷第1期《控制理论与应用》上，刊载了雷迅撰写的论文《ITAE标准传递函数的结构型式探讨》[1]，该文给出了从复域判别性能指标ITAE$\left(\int_0^\infty |e(t)|\mathrm{d}t\right)$敛散性的判别定理。引述如下：

“定理2　设连续函数$e(t)$，$t\in[a,\infty)$，$a>0$，其拉氏变换$E(s)$是存在的，$E(0)=0$)，若它在虚轴上，s右半平面是解析的，又假定存在$P>1$的正整数，使$\lim\limits_{s\to 0}\left|s\dfrac{\mathrm{d}^{p+1}E(s)}{\mathrm{d}s^{p+1}}\right|$存在，则$\int_a^\infty t|e(t)|\mathrm{d}t$是收敛的，若$\lim\limits_{s\to 0}\left|s\dfrac{\mathrm{d}^2E(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|=d>0$，$\left(\text{或}\lim\limits_{s\to 0}\left|s\dfrac{\mathrm{d}^2E(s)}{\mathrm{d}s^2}\right|=\infty\right)$，则积分$\int_a^\infty t|e(t)|\mathrm{d}t$是发散的.”

这里给出的仅仅是充分性判据．而且，其对收敛性条件的证明是很值得商榷的．因此，本文对ITAE的敛散性问题，特作如下的再探讨，期望能对以ITAE为性能指标的最优控制的理论与应用有些帮助.

二、正　文

关于ITAE敛散性的复域判定定理

假设：（1）误差函数$e(t)$分段连续，（2）其拉氏变换$E(s)$存在，（3）除去在有限个或无限个极点上以外，$E(s)$在s全平面解析，则ITAE收敛的充分、必要条件是$|E(s)|$在$\mathrm{Re}\,s\geqslant 0$上有界.

本文于1988年3月25日收到．1989年2月22日收到修改稿.

证 充分性 设$|E(s)|$在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$上的上界为$M_1$，$E(s)$在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$上无极点，按假设（3），$E(s)$在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$解析，特别是，$E(s)$在虚轴上解析。因而$E(s)$在虚轴连续，所以，对任何$\omega$，均有

$$\lim_{\sigma\to 0}|E(\sigma+j\omega)-E(j\omega)|=0 \tag{1}$$

定义一个以δ为参变量的集合$G[\delta](\delta>0)$，

$$G[\delta]\triangleq\{s\,|\,s=\sigma+j\omega-\delta\leqslant\sigma<0\} \tag{2}$$

断言：必存在一个$\delta^*>0$，在$G[\delta^*]$上$E(s)$解析。

反设断言不成立。我们做一个δ的序列：$\delta(1),\delta(2),\cdots$。$\delta(n)=\frac{1}{2}\delta(n-1)$并取$\delta(1)=1$。按反设在$G[\delta(n)]$上至少可选出一个$E(s)$的极点，记作$P_n$，$P_n=\sigma_n+j\omega_n$。对于任意给定的$M_2>0$，必存在一个$Q_n\in G[\delta(n)]$，$Q_n=\theta_n\sigma_n+j\omega_n$，$(0<\theta_n<1)$，使$|E(Q_n)|>M_1+M_2$。根据三角形边长不等式，有

$$|E(Q_n)-E(j\omega_n)|>M_2 \tag{3}$$

当$n\to\infty$，$\delta_n\to 0$时，（3）式仍成立。

这与（1）式矛盾。所以，反设不成立，必存在$\delta^*>0$，使$E(s)$在$G[\delta^*]$上因而在$\mathrm{Re}\, s\geqslant-\delta^*$上无极点，因而$E[s-\delta^*]$在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$上解析。引用拉氏变换终值定理(文2)，可得

$$\lim_{t\to\infty}e(t)e^{\delta^* t}=\lim_{s\to 0}sE[s-\delta^*]=0 \tag{4}$$

即对$\forall\varepsilon>0$，存在$T>0$，使对$\forall t>T$，成立$|e(t)e^{\delta^* t}|<\varepsilon$，或

$$|e(t)|<\varepsilon e^{-\delta^* t} \tag{5}$$

$$\int_0^\infty|e(t)|t\,dt=\int_0^T|e(t)|t\,dt+\int_T^\infty|e(t)|t\,dt$$

$$<\int_0^T|e(t)|t\,dt+\int_T^\infty\varepsilon e^{-\delta^* t}t\,dt<\infty \tag{6}$$

必要性 设ITAE收敛，则$\int_0^\infty|e(t)|dt$亦收敛。在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$，有

$$|E(s)|=\left|\int_0^\infty e(t)e^{-st}dt\right|\leqslant\int_0^\infty|e(t)|dt<\infty \tag{7}$$

证毕。

三、讨 论

假设（3）是一个并非一切$e(t)$均能满足的假设。例如，$\bar{e}(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$。显然，$\bar{E}(s)=\int_0^\infty\dfrac{1}{1+t^2}e^{-st}dt$存在，其收敛横座标等于零。在$\mathrm{Re}\, s\geqslant 0$上

$$|\overline{E}(s)| = \left|\int_0 \frac{1}{1+t^2} \cdot e^{-st}\, dt\right| \leqslant \int_0 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

但是，$\int_0^\infty |\bar{e}(t)|t\ dt = \int_0^\infty \frac{t}{1+t^2}\, dt$并不收敛。

出现以上结果的原因在于$\bar{e}(t)$不满足假设（3）。

在实际应用中，总是从系统的传递函数而不是从$e(t)$来求出$E(s)$的。对于有限或无限维的线性时不变系统而言，在典型输入（例如阶跃输入）下，$E(s)$是s以及e^{-Ts}、$\sinh s$ $\cosh s$等解析函数的有理分式。因为解析函数的复合函数仍为解析函数，所以，$E(s)$总是能够满足假设（3）的。因此，我们尽可以放心地使用本定理，简单而准确地判定所研究的反馈控制系统的ITAE敛散性。

参 考 文 献

〔1〕 雷迅，ITAE标准传递函数结构型式的探讨，控制理论与应用，3,1，（1986），91－96。

〔2〕 Benjamin C. Kuo, Automatic Control Systems, Prentice-Hall Inc., Third Edition (1975), 21.

On the Problem of Convergence and Divergence of ITAE

Gao Yuenong

(Department of Automation, Wuhan Iron and Steel University)

Abstract

The problem of convergence and divergence of the performence index ITAE is discussed. A sufficient and necessary criterion is proposed and proved. It is an improvement of the result found in reference [1]

Key words——Linear system; ITAE Criterion; Convergence.