第6卷 增刊1 控制理论与应用 Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Jan., 1989

离散时延系统的LQI控制*

童调生 刘 星
（湖南大学电气工程系，长沙）

摘 要

本文将一种实用的数字最优控制算法——LQI算法，推广到了离散时延系统，得到了一种纯滞后过程微机控制适用的算法。

一、引 言

近年来国外在将最优控制理论实用化方面做了大量工作。研究内容之一是将最优调节器理论改造成适合于微机实时控制应用。已取得的重要成果有数字LQI算法。该算法首先由D. M. Auslandr等人于1978年在文〔1〕中介绍。以后富琢又于1979年将其作为现代控制理论面向微机实用化的重要成果在文〔2〕中予以介绍。然而，更引人注目的是，村上等人于1983年在小汽车的微机控制中采用了这种算法[3]，并作了行车实验，结果很令人满意。

本文将把LQI算法，推广到离散时延系统。因过程控制中常遇到带纯滞后的数学模型，故本研究有实际意义。本文的工作为：较之文〔1〕，更深入地研究了LQI算法下系统的稳定性问题；研究了在采用扩展状态空间法[4]设计离散时延系统的最优控制时，解的存在问题；导出了离散时延系统的LQI算法，作了数字仿真和分析。

二、LQI算法下闭环系统的稳定性

下面将对文〔1〕没有详细讨论的LQI算法下闭环系统的稳定性问题予以严格的理论说明。先导出数字LQI算法。

考虑系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Dw, \tag{2.1a}$$

$$y(k)=Cx(k). \tag{2.1b}$$

这里$x\in R^{n\times 1}$为状态，$u\in R^{r\times 1}$为控制，$w\in R^{q\times 1}$为常值扰动，$y\in R^{m\times 1}$为输出。A、B、C、D为适当维数的实常矩阵。且$\mathrm{rank}[B]=r$，$\mathrm{rank}[C]=m$，$\mathrm{rank}[D]=q$。

对于（2.1），设希望的输出为y_0（常数），定义输出误差为

$$e(k)=y(k)-y_0. \tag{2.2}$$

（2.1a）两边取一阶后向差分，注意w之差分为零，则

---

*中国科学院科学基金资助的课题。

本文于1986年7月4日收到。1987年1月17日收到修改稿，

$$\nabla x(k+1)=A\nabla x(k)+B\nabla u(k). \tag{2.3}$$

而

$$e(k+1)=y(k+1)-y_0=e(k)+\nabla y(k+1),$$
$$\therefore\quad e(k+1)=e(k)+CA\nabla x(k)+CB\nabla u(k), \tag{2.4}$$

故有

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ \nabla x(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & CA \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(k) \\ \nabla x(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix}\nabla u(k). \tag{2.5}$$

或简记为

$$\tilde{x}(k+1)=\tilde{A}\tilde{x}(k)+\tilde{B}v(k), \tag{2.5'}$$

其中 $\tilde{x}(k)=[e^T(k)\ \nabla x^T(k)]^T$, $v(k)=\nabla u(k)$, $\tilde{A}=\begin{bmatrix} I_m & CA \\ 0 & A \end{bmatrix}$, $\tilde{B}=\begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix}$.

对式(2.5)所示系统可取 R 为 $r\times r$ 实对称正定阵，$Q_e=H_e^TH_e$ 为 $m\times m$ 实对称正定矩阵同时 H_e 为 $m\times m$ 阵，$Q_x=H_x^TH_x$ 为 $n\times n$ 实对称非负定阵同时 H_x 为 $n\times n$ 阵，取性能指标为

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\{e^T(k)Q_ee(k)+\nabla x^T(k)Q_x\nabla x(k)+\nabla u^T(k)R\nabla u(k)\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\{\tilde{x}^T(k)\tilde{Q}\tilde{x}(k)+v^T(k)Rv(k)\}, \tag{2.6}$$

这里 $\tilde{Q}=\tilde{H}^T\tilde{H}=\begin{bmatrix} Q_e & 0 \\ 0 & Q_x \end{bmatrix}$, $\tilde{H}=\begin{bmatrix} H_e & 0 \\ 0 & H_x \end{bmatrix}$. J 的物理意义可理解为不仅要求对误差进行渐近调节还要求控制过程中状态与控制的变化率不要过于剧烈.

由线性最优调节器理论[5]知：要(2.5)在(2.6)下，通过求解 Riccati 方程(稳态解)

$$\tilde{P}=\tilde{Q}+\tilde{A}^T\tilde{P}\tilde{A}-\tilde{A}^T\tilde{P}\tilde{B}(R+\tilde{B}^T\tilde{P}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}\tilde{A}, \tag{2.7}$$

得到最优增益

$$\tilde{K}=(R+\tilde{B}^T\tilde{P}\tilde{B})^{-1}\tilde{B}^T\tilde{P}\tilde{A}, \tag{2.8}$$

及最优控制

$$v(k)=-\tilde{K}\tilde{x}(k). \tag{2.9}$$

或(记 $\tilde{K}=(\tilde{K}_e\tilde{K}_x)$)

$$u(k)=-\tilde{K}_e\sum_{j=0}^{k}e(j)-\tilde{K}_xx(k). \tag{2.9'}$$

而使最优闭环系统

$$\tilde{x}(k+1)=(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K})\tilde{x}(k) \tag{2.10}$$

是渐近稳定的，须有（i）（$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$）是能稳的；（ii)($\widetilde{H}$，$\widetilde{A}$)是能检测的。

现在的问题是，(A,B)能稳，可否保证（$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$)能稳？($\widetilde{H}$，$\widetilde{A}$）在什么条件下能检测？这些问题可借助文〔6〕之PBH检查法来分析。

定理 2.1　如（A，B）能稳，且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & C \\ B & A-I_n \end{bmatrix}=m+n, \tag{2.11}$$

则（$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$）能稳。

证　由PBH检查法知只要证明

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}[\widetilde{A}-\lambda I_{m+n}\quad \widetilde{B}]\\&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}(1-\lambda)I_m & CA & CB\\ 0 & A-\lambda I_n & B\end{bmatrix}=m+n\end{aligned} \tag{2.12}$$

对任意复数$|\lambda|\geqslant1$成立。因（A,B）能稳，故($A-\lambda I_n\quad B$)对任意复数$|\lambda|\geqslant1$之秩为n。因此（2.12）在$\lambda\neq1$时成立。当$\lambda=1$时，因

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} CA & CB \\ A-I_n & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\left\{\begin{bmatrix} I_m & C\\ 0 & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & C\\ B & A-I_n\end{bmatrix}\right\},$$

只要（2.11）成立，则（2.12）成立。定理得证。

定理 2.2　设Q_e正定，则如（C,A）能检测，就有（$\widetilde{H}$，$\widetilde{A}$）能检测。

证　由PBH检查法知只要证明

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\widetilde{H}\\ \widetilde{A}-\lambda I_{m+n}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} H_e & 0\\ 0 & H_x\\ (1-\lambda)I_m & CA\\ 0 & A-\lambda I_n\end{bmatrix}=m+n \tag{2.13}$$

对任意复数$|\lambda|\geqslant1$成立。因（C,A）能检测，且$|\lambda|\geqslant1$时A满秩，故有(CA，A)能检测，进而有$|\lambda|\geqslant1$时

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} CA\\ A-\lambda I_n\end{bmatrix}=n$$

成立。已知Q_e正定，rank$[H_e]=m$，故(2.13)对任意复数$|\lambda|\geqslant1$成立。定理得证。

综合前述定理，有

定理 2.3　如取Q_e正定，且有（2.11）成立时，则由(A,B,C)导出的($\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$）在性能指标（2.6）下导出的闭环系统（2.10）渐近稳定。

证　由文献〔5〕立即可得。

三、扩展状态空间法与最优控制

取（2.1a）中$D=0$，$u(k)$为$u(k-N)$，则有

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k-N). \tag{3.1}$$

采用扩展状态空间法[4]，有

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ u(k-N+1) \\ \vdots \\ u(k-1) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k-N) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_r \end{pmatrix} u(k) \tag{3.2}$$

或简记成

$$\overline{x}(k+1)=\overline{A}\,\overline{x}(k)+\overline{B}u(k). \tag{3.2'}$$

(3.2′)中$\overline{x}(k)$、$\overline{A}$、$\overline{B}$分别取(3.2)中的对应形式。

如要对(3.2)运用规范最优调节器理论设计，同样要求(i)($\overline{A}$, $\overline{B}$)能稳；(ii)($\overline{H}_x$, $\overline{A}$)能检测。这里$\overline{H}_x$属于性能指标

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\{\overline{x}^T(k)\overline{Q}_x\overline{x}(k)+u^T(k)Ru(k)\}, \tag{3.3}$$

其中

$$\overline{Q}_x=\begin{bmatrix} Q_x & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\Bigg\}N\text{个} =\overline{H}_x^T\overline{H}_x,\ \overline{H}_x=\begin{pmatrix} H_x & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

对于扩展系统(3.2)，有以下结论：

定理 3.1 如(A,B)能稳，则($\overline{A}$, $\overline{B}$)能稳。

证 由PBH检查法，知只要证明

$$\operatorname{rank}[\overline{A}-\lambda I_{n+N\times r},\ \overline{B}] = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc:ccc|c} A-\lambda I_n & B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\lambda I_r & I_r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & -\lambda I_r & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & I_r & 0 \\ 0 & \cdots & & & -\lambda I_r & I_r \end{array}\right) = n+N\times r, \tag{3.4}$$

对任意复数$|\lambda|\geqslant 1$成立。因(A,B)能稳，$(A-\lambda I_n\ \ B)$之秩对任意复数$|\lambda|\geqslant 1$之秩为n，故$|\lambda|\geqslant 1$时显然有(3.4)成立。定理得证。

定理 3.2 如(H_x,A)能检测，则($\overline{H}_x$, $\overline{A}$)能检测。

证 要证明($\overline{H}_x$, $\overline{A}$)之能检测性，只要证明对于所有$|\lambda|\geqslant 1$的复数λ，下式成立

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\bar{H}\\ \bar{A}-\lambda I_{n+N\times r}\end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} H_x & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ A-\lambda I_n & B & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & -\lambda I_r & I_r & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & I_r\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\lambda I_r \end{pmatrix}=n+N\times r. \qquad (3.5)$$

因(H_x,A)能检测，故$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}H_x\\ A-\lambda I_n\end{bmatrix}=n$对任意复数$|\lambda|\geqslant 1$成立。进而(3.5)任意复数$|\lambda|\geqslant 1$成立。定理得证。

综合上述定理，立即有

定理 3.3 如系统(3.1)中(A,B)能稳定，则只要合理选择权矩阵，就能保证用扩展状态空间法设计的最优控制存在，且最优闭环系统渐近稳定。

证 由文献[5]立即可得。

四、离散延时系统的LQI控制

令(2.1a)中$u(k)$为$u(k-N)$，则有

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k-N)+Dw, \qquad (4.1)$$

对(4.1)和(2.1b)运用本文第二部分的方法，有

$$\tilde{x}(k+1)=\tilde{A}\tilde{x}(k)+\tilde{B}v(k-N). \qquad (4.2)$$

上式中各变量、矩阵之定义同(2.5′)。

应用扩展状态空间法，有

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}(k+1)\\ v(k-N+1)\\ v(k-N+2)\\ \vdots\\ v(k-1)\\ v(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{A} & \tilde{B} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & I_r & & \vdots\\ 0 & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & I_r\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}(k)\\ v(k-N)\\ v(k-N+1)\\ \vdots\\ v(k-2)\\ v(k-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\ 0\\ I_r\end{pmatrix}v(k), \qquad (4.3)$$

或简记为

$$\overline{x}(k+1)=\overline{A}\,\overline{x}(k)+\overline{B}\,v(k),\tag{4.3'}$$

其中

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}\widetilde{A} & \widetilde{B} & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & I_r & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & I_r\\ 0 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad \overline{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\I_r\end{pmatrix},\quad \overline{x}(k)=\begin{pmatrix}\widetilde{x}(k)\\ v(k-N)\\ \vdots\\ v(k-2)\\ v(k-1)\end{pmatrix}.$$

对（4.3′）应用规范最优调节器理论，取性能指标为

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}\{\overline{x}^T(k)\overline{Q}\,\overline{x}(k)+v^T(k)Rv(k)\},\tag{4.4}$$

由本文第二、三部分知，只要（A,B）能稳，（2.11）成立，（C,A）能检测，且取 $\widetilde{Q}=\begin{bmatrix}Q_e & 0\\ 0 & Q_x\end{bmatrix}$ 中 Q_e 正定，则在（4.4）中取

$$\overline{Q}=\begin{bmatrix}\widetilde{Q} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}\ (N\text{个}),$$

就有（4.3）在(4.4)下的最优控制存在，最优闭环系统渐近稳定。这时 Riccati 方程为

$$\overline{P}=\overline{Q}+\overline{A}^T\overline{P}\,\overline{A}-\overline{A}^T\overline{P}\,\overline{B}\,(R+\overline{B}^T\overline{P}\,\overline{B})^{-1}\,\overline{B}^T\overline{P}\,\overline{A}\tag{4.5}$$

最优增益为

$$\overline{K}=(R+\overline{B}^T\overline{P}\,\overline{B})^{-1}\,\overline{B}^T\,\overline{P}\,\overline{A},\tag{4.6}$$

最优控制为

$$v(k)=-\overline{K}\,\overline{x}(k),\tag{4.7}$$

（4.7）式即为

$$\begin{aligned}\nabla u(k)&=-\overline{K}_x\widetilde{x}(k)-\overline{K}_N\nabla u(k-N)\cdots-\overline{K}_1\nabla u(k-1)\\&=-\overline{K}_e e(k)-\overline{K}_x\nabla x(k)-\sum_{i=1}^{N}\overline{K}_i\nabla u(k-i)\\&=\overline{K}_e(y_0-y(k))-\overline{K}_x\nabla x(k)-\sum_{i=1}^{N}\overline{K}_i\nabla u(k-i).\end{aligned}\tag{4.8}$$

注意到 $u(i)$，$x(i)$ 当 $i<0$ 时为零，故有

$$u(k)=\overline{K}_e\sum_{i=0}^{k}(y_0-y_{(i)})-\overline{K}_x x(k)-\sum_{i=1}^{N}\overline{K}_i u(k-i),\tag{4.9}$$

这里（4.8）为增量式算法，（4.9）为位置式算法。控制中包含了输出误差的积分，全

状态反馈，以及前 N 拍控制的反馈。积分项消除静差，状态反馈改善快速性，前 N 拍控制的反馈保证了系统的稳定性，补偿了延时的影响。（4.9）式下的闭环系统如下图

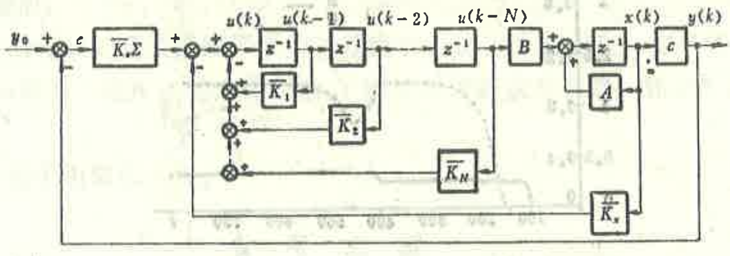


图 1　离散延时系统的LQI闭环控制

五、数字算例与闭环系统分析

下面对文献〔7〕中 Dahlin 给出的过程模型

$$G(s)=e^{-50s}\cdot\frac{0.04}{s+0.04}\cdot\frac{0.1}{s+0.1}$$

应用本文的算法进行数字仿真。上式对应的状态方程为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.004 & -0.14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0.004\end{bmatrix}u(t-50),\\ y=x_1\end{cases}$$

同文献〔7〕取采样周期 T = 10 将上式离散化，有

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.87195 & 5.04068\\ -0.02016 & 0.16625\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.54104\\ 0.06775\end{bmatrix}u(k-5),\\ y(k)=x_1(k).\end{cases}$$

对上面系统，给定希望输出 $y_0=1$，在 $t=400$ 时突加负载干扰 $w=0.1$，在三个不同误差加权值下进行仿真。

控制算法的一般形式为

$$u(k)=\overline{K}_e\sum_{i=0}^{k}(y_0-y(i))-\overline{K}_{x1}x_1(k)-\overline{K}_{x2}x_2(k)$$

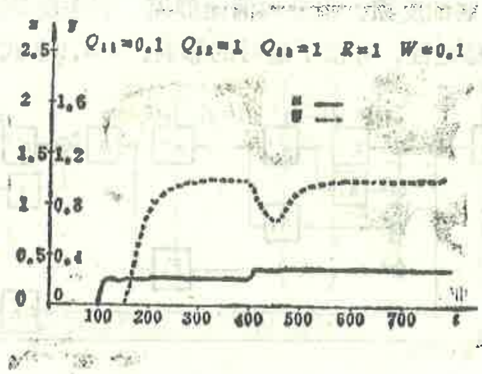
$$-\overline{K}_5u(k-5)-\overline{K}_4u(k-4)-\overline{K}_3u(k-3)-\overline{K}_2u(k-2)-\overline{K}_1u(k-1).$$

（i）$\overline{Q}=\mathrm{diag}(0.1,1,1,0,0,0,0,0)$，$R=1$；

控制增益可求得依次为

0.23722，0.73308，5.9183，0.93412，0.94577，0.95645，0.95401，0.89982，

仿真曲线为

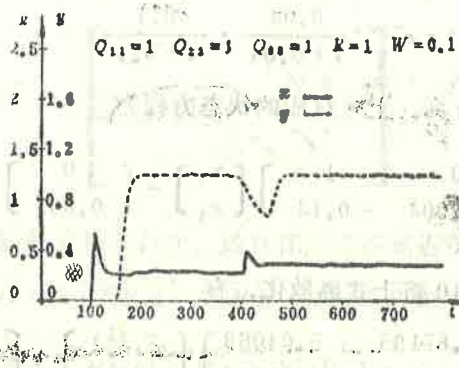


(ii) $\overline{Q}=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $R=1$;

控制增益依次为

0.64099, 1.8119, 14.323, 2.2234, 2.1175, 1.9595, 1.723, 1.3678.

仿真曲线为

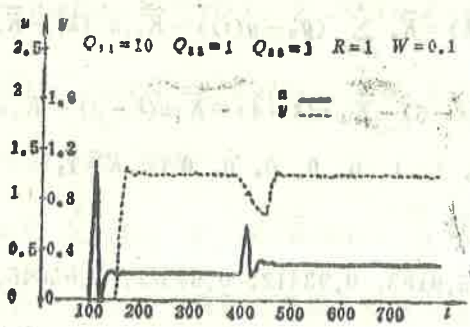


(iii) $\overline{Q}=\mathrm{diag}(10,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $R=1$;

控制增益依次为

1.3743, 3.7542, 29.421, 4.5342, 4.2006, 3.7161, 3.0282, 2.0966.

仿真曲线为



结合图 1 和仿真结果，有下面结论

（1）本系统对阶跃型扰动无静差；只要合理选择权矩阵，可望获得优于Dahlin 算法的系统瞬态响应；

（2）前N 拍控制的反馈保证了系统的稳定性，这正是利用在一定条件下，全状态反馈的最优闭环系统一定渐近稳定而取前 N 拍控制作新状态变量，建立扩展系统的目的；

（3）算法易于用微机实现。

参考文献

〔1〕 Auslander, D. M., et al, Direct Digital Process Control, Practice and Algorithms for Microprocessor Application, Proceedings of IEEE, 66: 2, (1978), 199-208.

〔2〕 富塚诚義，マイクロコンピ ｌ ータによ为现代制卸理论の实用化とそのアルゴりズム，计测と制御，18:8，（昭54），640—649.

〔3〕 村上周太等，マイクロプロセツサそ用い太自動车の最适速度制御，计测自動御学会论文集，19:7，（昭58），569—573.

〔4〕 依扎尔曼，R. 著，王振淮等译，数学调节系统，机械工业出版社，北京，（1983）20—24，165—167.

〔5〕 安德森，B. D. O 等著，龙云程译，线性最优控制，科学出版社，北京，（1982），40—48，395—404.

〔6〕 Kailath, T., Linear Systems, Englewood Cliffs-Prentice-Hall New York, (1980), 135-139, 243-244.

〔7〕 Dahlin, E. B., Designing and Tuning Digital Contrllers, Instruments & Control Systems, 41, (June 1968), 77-83.

LQI Control of Discrete Systems with Time-delay

Tong Tiaosheng, Liu Xing

(Department of Electrical Engineering, Hunan University, Changsha)

Abstract

The paper extends an algorithm of digital optimal control-LQI algorithm to discrete systems with time-delay and develops an algorithm suitable for microcomputer control of time-delay processes.