第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

线性特征系统的充分必要条件*

程 鹏　　杨 玲

（北京航空学院自动控制系）

摘　要

时不变线性系统加了输出反馈之后，闭环特征方程的系数h_i是反馈增益阵的元素k_{ij}的函数．本文给出h_i是k_{ij}的线性函数的充分必要条件．

一、前　言

线性时不变系统的动态方程为

$$\dot{x}=Ax+Bu,\qquad y=Cx,\tag{1}$$

其中，A、B和C分别是$n\times n$、$n\times m$和$l\times n$的实常量矩阵，并且假定$\operatorname{rank}B=m$、$\operatorname{rank}C=l$。系统（1）在输出反馈

$$u=Ky+v\tag{2}$$

的作用下所得到的闭环系统方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(A+BKC)x+Bv,\\ y&=Cx.\end{aligned}\tag{3}$$

设闭环系统（3）的特征多项式$\pi(A+BKC)$为

$$\pi(A+BKC)=s^n+h_1s^{n-1}+\cdots+h_{n-1}s+h_n.\tag{4}$$

（4）式中的h_i是反馈增益阵K的元素k_{ij}的函数，h_i可以分成两部分，一部分是k_{ij}的线性函数，另一部分是k_{ij}的非线性函数，分别用L_i和N_i表示，即

$$h_i=L_i+N_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).\tag{5}$$

定 义　若对任意的K，均有$N_i(i=1,2,\cdots,n)$为零，即$h_i=L_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称系统（1）具有全部线性特征系数，简称具有全部线性特征系数的系统为线性特征系统。

以上的定义强调了K阵的任意性，这和并矢反馈的方法不同，尽管线性特征系统和并矢反馈方法都是基于线性方程组来讨论极点配置问题，但使得N_i为零的途径不同，后者通过取K阵为并矢形式，而线性特征系统则通过（A、B、C）的特殊结构来保证。

二、线性特征系统的充分必要条件

参考文献[2]曾经提供了一个系统是线性特征系统的充分条件，并且证明了它比文

---

*国家自然科学基金资助的课题．

本文于1986年10月6日收到，1988年4月29日收到修改稿．

献〔1〕所提供的条件更为广泛。文献〔2〕最后还指出满足这一充分条件的系统应具有的几何结构特点，即C核中的最大（A、B）不变子空间中应至少含有$m-1$个$\mathrm{Im}B$中的向量。本文进一步证明文献〔2〕所提出的条件是线性特征系统的必要条件。

定 理 系统（1）是线性特征系统的充分必要条件为

$$\dim(T^M\cap\mathrm{Im}B)\geqslant m-1, \tag{6}$$

这里T^M表示含在C核中的最大（A、B）不变子空间，$\mathrm{Im}B$表示B的值域。

证 充分性。当$\dim(T^M\cap\mathrm{Im}B)=m-1$时，不妨假定$T^M\cap\mathrm{Im}B$中的$m-1$个向量就是$B$的第2列至第$m$列，并记为$b_2,b_3\cdots,b_m$。若$T^M$中与$\mathrm{Im}B$中向量线性无关的向量数为$d_1$，并用$q_1,\cdots,q_{d_1}$来表示这些向量。选取状态空间的基底为

$$q_1',\cdots,q_r',b_1,b_2,\cdots,b_m,q_1,\cdots,q_{d_1}, \tag{7}$$

这里$r+m+d_1=n$。在这组基底下系统方程（1）中的（A、B、C）可化为下列形式

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r & 1 & d_1+m-1 \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ d_1+m-1 \end{array} & \overline{A}=\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & 0 \\ \hline A_3 & A_4 & A_5 \\ \hline A_6 & A_7 & A_8 \end{array}\right) \end{array},\quad B=\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_m \\ \hline 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} r \\ \\ d_1 \end{array} \tag{8}$$

$$\overline{C}=\left[\begin{array}{c|c|c} c_1\cdots c_r & c_{r+1} & 0 \end{array}\right]$$

若b_1也属于T^M时，式中$c_{r+1}=0$，$A_2=0$。（8）式的形式即是文献〔2〕中命题2所给的形式，所以系统是线性特征系统。

为了证明定理条件（6）式的必要性，先引入以下三个引理。

引理 1 系统（1）是线性特征系统的必要条件为

$$\dim(\ker C\cap\mathrm{Im}B)\geqslant m-1, \tag{9}$$

这里$\ker C$表示C的核空间。

证 由文献〔2〕对h_2的计算可知

$$N_2=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}KCB)^2-\mathrm{tr}(KCB)^2], \tag{10}$$

若$CB=0$，N_2显然为零。当$CB\neq0$时，对任意的K，（10）式为零的充要条件是$\mathrm{rank}CB=1$，即（9）式成立。

由引理1可见n,m,l之间应有关系

$$n\geqslant m+l-1,\qquad 当\mathrm{rank}CB=1, \tag{11}$$

当$CB=0$时，（11）式变成$n\geqslant m+l$。（11）式从另一侧面说明了研究线性特征系统的意义。因为在大部分研究输出反馈配置极点问题的文章中，都利用到$m+l-1\geqslant n$这一条件，这个正好与（11）式的情况相反。

引理 2 若

$$\begin{gathered}\dim(\ker C\cap\mathrm{Im}B)\geqslant m-1,\\ \dim(T^M\cap\mathrm{Im}B)=m-m_1\quad(m_1\geqslant1),\end{gathered} \tag{12}$$

则存在一个等价变换使得（A、B、C）可化为下列形式

$$\overline{A}=\begin{array}{cl} \begin{array}{c:c:c} r & m & m_1-m_1+d_1 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c:c:c} A_1 & A_2 & 0 \\ \hdashline A_3 & A_4 & A_5 \\ \hdashline A_6 & A_7 & A_8 \end{array}\right) & \begin{array}{l} r \\ \\ \\ \end{array} \end{array},\quad \overline{B}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline I_m \\ \hdashline 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} r \\ \\ d_1 \end{array}, \tag{13}$$

$$\overline{C}=\left[\begin{array}{c:c:c} c_1\cdots c_r & \underbrace{c_{r+1}0\cdots 0}_{m_1} & 0\cdots 0 \end{array}\right]$$

且在$CB=0$时$c_{r-l},c_{r-l+1},\cdots,c_r$线性无关，在$CB\neq 0$时$c_{r-l+1},\cdots,c_r,c_{r+1}$线性无关。

证　（12）式表明$\mathrm{Im}B$中有$m_1>1$个向量不属于T^M，不妨假定为$b_1,b_2,\cdots,b_{m_1}$，可如下选取n个线性无关向量作为状态空间的基底

$$q_1',\cdots,q_r',b_1,b_2\cdots,b_m,q_1,\cdots,q_{d_1}. \tag{14}$$

（14）式中的向量除了$n-l$个在$\ker C$中选取之外，其余l个的挑选需满足以下条件

$$\text{当}Cb_1=0 \qquad \det C[q_{r-l}'\cdots q_r']\neq 0, \tag{15}$$

$$\text{当}Cb_1\neq 0 \qquad \det C[q_{r-l+1}'\cdots q_r' b_1]\neq 0. \tag{16}$$

在这样选取的基底下$(A、B、C)$可化为（13）式的形式，且$C_i=Cq_i'(i=1,2,\cdots,r),c_{r+1}=Cb_1$，由（15）和（16）式可知$c_i$满足引理条件．这里$c_i=0\ (i=1,2,\cdots,r-l-1$或$r-l)$并非本质的要求。

引理 3　对于（13）式中的A_2的后m_1-1列A_{22}，存在如下形式的$r\times r$阵T_1，使得

$$T_1A_{22}=\begin{pmatrix} I_{r-\delta} & 0 \\ & \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix}A_{22}=\begin{pmatrix} A_{22}' \\ 0 \\ I_{m_1-1} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \}\delta \end{array}, \tag{17}$$

式中，T_{22}是$\delta\times\delta$的可逆矩阵，A_{22}'表示A_{22}的前$r-\delta$行，而δ取值为

$$\delta=\begin{cases} l & Cb_1=0, \\ l-1 & Cb_1\neq 0. \end{cases}$$

证　首先证明A_{22}各列线性无关，否则若有第i列A_{22}^i可表成其余列的线性组合

$$A_{22}^i=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m_1}a_jA_{22}^j,$$

这时可构造向量

$$b' = b_i - \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m_1} a_j b_j .$$

显然$b' \in \mathrm{Im}B$且和$b_{m_1+1}, \cdots, b_m$线性无关，而且$Cb' = 0$，而Ab'可为$b_1, b_2, \cdots, b_m, q_1, \cdots, q_{d_1}$表出，这表明$T^M$中应包含有$b'$，这和（12）式相矛盾。

（17）式所表明的T_1代表对A_{22}进行以下的行初等变换

1）后δ行乘以非零常数，

2）后δ行中任意两行交换，

3）任一行乘以非零常数加到后δ行中任一行。

由于A_{22}列线性无关，借助于第三种初等变换可使A_{22}的后δ行做到列无关，而后δ行进行三种通常的行初等变换就可将A_{22}化为（17）式的形式。

若对（13）式中的$\overline{C}$进行与（17）式相应的列变换，即有

$$\overline{\overline{C}} = \overline{C}\begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & I_{n-r} \end{bmatrix} = [c_1' \cdots c_r' \ \overbrace{c_{r+1}' \ 0 \cdots 0}^{l}],$$

$\overline{\overline{C}}$中自右向左数的l个非零列仍保持了引理2所要求的线性无关性不变。

三、定理必要性的证明

下面证明定理条件的必要性。若（6）式不满足，则有$m_1 > 1$存在，使得

$$\dim(T^M \cap \mathrm{Im}B) = m - m_1$$

成立，若造成上式成立的原因是$\dim(\ker C \cap \mathrm{Im}B) < m-1$，根据引理1，显然系统不是线性特征系统。所以以下讨论总不妨假定$b_2, \cdots, b_{m_1}$在$\ker C$中。由引理2，可选取n个线性无关的向量作为基底，使得（A、B、C）可化为（13）式的形式，由引理3，不妨假定（13）式中A_2的后m_1-1列具有（17）式的形式，并且$c_1, c_2, \cdots, c_r, c_{r+1}$满足引理2所要求的线性无关条件。

根据（13）式可知$\overline{B}K\overline{C}$中除了下列的子矩阵

$$\begin{bmatrix} K_1 c_1 & \cdots & K_1 c_r & K_1 c_{r+1} \\ K_2 c_1 & \cdots & K_2 c_r & K_2 c_{r+1} \\ & \cdots & & \\ K_m c_1 & \cdots & K_m c_r & K_m c_{r+1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

可能不为零之外，其他元素都为零，这里K_i表示K阵的第i行。而这一子矩阵位于$\overline{B}K\overline{C}$的第$r+1$行至第$r+m$行和第1列至第$r+1$列的位置上。

为了叙述方便，将$\overline{A}+\overline{B}K\overline{C}$特征矩阵的行列式表成如下形状

$$\pi(\overline{A}+\overline{B}K\overline{C})=\det\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} r+1 & m_1-1 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & 0\\ \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ} & \text{Ⅴ}\end{array}\right)\begin{array}{c} r\\ n-r\end{array}\end{array},\tag{19}$$

根据行列式的性质，由（19）式可得

$$\pi(\bar{A}+\bar{B}K\bar{C})=\det\begin{bmatrix}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & 0\\ \text{Ⅲ} & 0 & \text{Ⅴ}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}\text{Ⅰ} & 0 & 0\\ \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ} & \text{Ⅴ}\end{bmatrix}+\sum_i\det\begin{bmatrix}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ}' & 0\\ \text{Ⅲ} & \text{Ⅳ}' & \text{Ⅴ}\end{bmatrix}$$

$$=\Delta_1+\triangle_2+\sum_i\Delta_{3i}.\tag{20}$$

上式第三项表示了（19）式中Ⅱ块至少有一列被换为零列但不是m_1-1个零列，以及Ⅳ块中至少有一列为零列但不是m_1-1列全取零的各种情况的组合。（20）式中第二项根据定理充分性的证明可知全部特征系数是线性的。现取$K_{m_1+1}=K_{m_1+2}=\cdots=K_m=0$来讨论（20）式中的第一项。

（a）$c_{r+1}\neq0$，将Δ_1按前r行展开为一个r级子式Δ_{1r}与一个$n-r$级子式Δ_{1n-r}乘积的代数和。注意到Δ_1中前r行与前r列组成的子式$|sI_r-A_1|$若有一列被A_{22}中的某一列A_{22}^i取代时，将使这一子式的次数降低，当A_{22}^i的1元位于r级子式的对角线上，次数降一次，否则次数将降低二次。另一方面为了使Δ_{1n-r}不会因为含有已知的零列而为零，必须将Ⅱ块全部换入$|sI_r-A_1|$，而次数降低最少发生在Ⅱ的1元全部位于r级子式的对角线上，而且将子式按1元逐个展开的情况，这时可得

$$\Delta_{1r}\cdot\Delta_{1n-r}=(s^{r-(m_1-1)}+\beta s^{r-m_1}+\cdots)\cdot(\alpha_1 s^{n-r-m_1+1}+\alpha_2 s^{n-r-m_1}+\cdots)$$

$$=\alpha_1 s^{n-2m_1+2}+(\alpha_2+\beta\alpha_1)s^{n-2m_1+1}+\cdots$$

由于β是Δ_{1r}展开的系数，它不含K中的元素，而α_1不包含K的m_1个元的连乘项。而α_2中有一项α_2'具有以下形式

$$\alpha_2'=\det\left(\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\\vdots\\K_m\end{pmatrix}\overbrace{\left[c_{r-(m_1-2)}\cdots c_rc_{r+1}\right]}^{m_1\text{列}}\right),$$

因为$c_{r-(m_1-2)},\cdots,c_r,c_{r+1}$线性无关，故总可选到$K_1,K_2,\cdots,K_{m_1}$使得$\alpha_2'\neq0$并出现$K$的$m_1$个元的连乘项，例如只要取

$$\begin{bmatrix}K_1\\K_2\\\cdots\\K_{m_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11} & & \\ & K_{22} & \\ & & \ddots\\ & & & K_{m_1m_1}\end{bmatrix}\cdot[c_{r-(m_1-2)}\cdots c_rc_{r+1}]^+$$

除了α_2'之外，α_2中不再含有K中m个元相连乘的项。另外若将A_2全部换入$|sI_r-A_1|$，所得的$\Delta_{1r}\cdot\Delta_{1n-r}$的$s$最高次为$n-2m_1$，所以这类子式的相乘积项不会影响$s^{n-2m_1+1}$项的系数。

（b）$c_{r+1}=0$，这时m_1个K元的连乘项只出现在A_2的全部列向量被换入$|sI_r-A_1|$，而且当1元全位于对角线上时，次数降低最少，这时将有

$$\Delta_{1r}\cdot\Delta_{1n-r}=(s^{r-m_1}+\cdots)\,(\bar{\alpha}_1 s^{n-r-m_1}+\bar{\alpha}_2 s^{n-r-m_1-1}+\cdots)$$

$$=\bar{\alpha}_1 s^{n-2m_1}+\cdots$$

这里$\bar{\alpha}_1$中有一项$\bar{\alpha}_1'$具有以下形式

$$\bar{\alpha}_1'=\det\left(\begin{pmatrix}K_1\\K_2\\\vdots\\K_{m_1}\end{pmatrix}[c_{r-(m_1-1)}\cdots c_{r-1}\quad c_r]\right)$$

同理由于$c_{r-(m_1-1)},\cdots,c_{r-1},c_r$的线性无关性，故可取到适当的$K$，保证$m_1$个$K$元连乘项出现。而$\bar{\alpha}_1$中除了$\bar{\alpha}_1'$之外不再含有$K$中$m_1$个元素的连乘项。

现在$K_{m_1+1}=K_{m_1+2}=\cdots=K_m=0$的条件下来讨论（20）式中的第三项。同样可按前$r$行展开这项中的每一个子式为$r$级子式与$n-r$级子式相乘的代数和。但由于在Ⅱ′中至少有一零列，这一零列在Ⅲ′中的部分将在$n-r$阶子式中得到保持，因而$n-r$阶子式中至多只能有m_1-1列包含有K的元，因此在（20）式的第三项中不会出现K的m_1个元素的连乘项。因而不会有与α_2'及$\bar{\alpha}_1'$相抵消的可能。

综上所述，当（12）式成立时，总可以选到合适的K，使得或是s^{n-2m_1+1}项的系数($Cb_1\neq0$)或是s^{n-2m_1}项的系数（$Cb=0$）中含有m_1个K的元素的连乘项。定理的必要性证毕。注意在以上叙述中并未精确阐明各项展式的代数符号，也未阐明特征式的某一幂次的系数的表达式。

在定理的证明过程中实际上已阐明了本定理所给出的充分必要条件就是文献〔2〕命题2所给出的条件，只是那里未提供必要性的证明。也可以认为本定理是从几何结构特点，而文献〔2〕命题2是从矩阵表达形式，这两个不同的角度来阐明了线性特征系统。无疑地，线性特征系统充分必要条件的建立为研究线性特征系统的极点配置问题奠定了理论基础，而这一研究也将促进非线性特征系统极点配置问题的研究。

推 论　若系统（1）可控、可观测，则其为线性特征系统的充要条件为

$$\dim(T^M\cap\mathrm{Im}B)=m-1。\qquad(21)$$

证　当$\dim(T^M\cap\mathrm{Im}B)=\mathrm{Im}$时，$\mathrm{Im}B\subset T^M$，因而可控子空间$\langle A|B\rangle\subset T^M$，故$\dim T^M\geqslant n$，显然与$T^M\subset\ker C$而$\dim\ker C<n$相矛盾。这一推论在（8）式中的一个反映是$A_2\neq0$。

四、例　题

为了说明定理的条件和线性特征系统的矩阵表达形式（8）式，计算以下简单的例题

设系统方程为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\2&-1&-2&3&-2&1&-2&2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}u \tag{22}$$

$$y=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}x$$

不难验证系统是可控可观测的。根据文献[3]所提供的计算方法，可以求出$\ker C$中的最大（A、B）不变子空间T^M，它是由向量e_6、e_7、e_8所张成的空间，这里e_i表示单位矩阵I_8的第i列。由此可得$\dim(T^M\cap \mathrm{Im}B)=2$，由推论可知（21）式满足，系统是线性特征系统。

可根据（7）式来选取状态空间的基底，由（7）式规定的符号可知这时$d_1=1$，$q_1=e_7$，而$q_1',\cdots,q_r'$的选取参考引理2的（16）式进行，这样可得一组基为

$$e_2\quad e_4\quad e_1\quad e_3\quad e_5\quad e_6\quad e_8\quad e_7,$$

在这组基底下，（A、B、C）可化为如（8）式所示的形式。

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c|c|ccc}0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\-1&3&2&-2&-2&1&2&2\\0&0&0&0&0&1&1&0\end{array}\right),\quad \overline{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overline{C}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix},$$

其中，A_2、c_{r+1}均不为零．由于（22）式所给的动态方程比较简单，所以也可由文献〔2〕的命题2直接判断出它是线性特征系统，且$r=4$．

参考文献

〔1〕 Tarokh, M., On Output Feedback Stabilization and Pole Assignment, Int.J.Control, 31: 2（1980）, 399－408．

〔2〕 程 鹏，关于线性特征系数的几个问题，控制理论与应用，3: 3，（1986）, 61－68．

〔3〕 旺纳姆．W．M著，姚景尹、王思平译，线性多变量控制（一种几何方法），科学出版社，北京，（1984）．

The Sufficient and Necessary Condition of Linear Characteristic Systems

Cheng Peng, Yang Ling

(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

When the output feedback is added, Hi's, which are the coefficients of closed characteristic equation of linear time-invariant systems, are the functions of kij which are the elements of feedback matrix K. The sufficient and necessary condition, which makes Hi be linear function of kij, is given in this paper.