精选-优化辅助变量法及其仿真研究

王先来　姬维君

（天津大学自动化系）

摘　要

本文分析了系统噪声模型参数估计的优化辅助变量选择问题．给出了交替估计系统的输入输出模型参数与噪声模型参数的精选-优化辅助变量算法．通过两个单变量随机系统的Monte-Carlo仿真试验，进一步说明了该算法对参数估计的有效性．

一、引　言

为了改善对噪声模型参数的估计特性，王先来在〔1〕中针对噪声模型为AR的情况，提出了几点改进措施，其仿真结果表明改进后的算法对于噪声模型参数的估计精度有明显的提高．本文分析了精选IV-AML法估计噪声模型参数时精度不高的原因；从辅助变量选择的角度分析了系统噪声模型参数的估计问题，并给出了近似优化的IV选择；通过对两个单变量随机系统的Monte-Carlo仿真试验，把该算法与精选IV-AML法[2]进行了比较，说明了该算法对参数估计的有效性．

二、精选IV—AML法估计噪声模型参数时误差较大的原因

假定待估计系统的模型为

$$y_k = B(z^{-1})/A(z^{-1})u_k + D(z^{-1})/C(z^{-1})e_k, \tag{1}$$

式中各有关项的意义参阅〔1—2〕．针对上述系统，P.C.Young提出了参数估计的精选IV-AML法．我们用$\theta=[a_1\cdots a_{na}b_0b_1\cdots b_{nb}]^T$表示系统输入输出模型（式（1）中的$A(z^{-1})$、$B(z^{-1})$）参数向量，其估计值记为$\hat{\theta}$；而用$\beta=[c_1\cdots c_{nc}d_1\cdots d_{nd}]^T$表示系统噪声模型（式（1）中的$C(z^{-1})$、$D(z^{-1})$）参数向量，其估计值记为$\hat{\beta}$．

精选IV-AML法是基于下述结论：当$N\to\infty$时，估计值$\hat{\theta}$与估计值$\hat{\beta}$渐近独立，$\hat{\theta}$为θ的渐近一致估计条件下，即误差$\hat{\theta}-\theta$对于参数β的估计影响不大时，只考虑用模型$\xi_k=D(z^{-1})/C(z^{-1})e_k$来估计参数$\beta$．然而在实际辨识算法中采样数$N$不可能取得很大，这样在一般中小规模采样下，$\hat{\theta}$与$\theta$之间就存在一定的误差，而通过关系式$\hat{\xi}_k=y_k-\hat{B}/\hat{A}u_k$，便形成$\hat{\xi}_k$与$\xi_k$之间误差$\Delta\xi_k=\hat{\xi}_k-\xi_k$可能相当大．因此在实际估计$\beta$时，就应当考虑$\Delta\xi_k$的影响．而精选IV-AML法未考虑$\Delta\xi_k$的影响，对参数$\beta$的估

本文于1986年1月18日收到．1987年5月13日收到修改稿．

计误差较大。

三、噪声模型参数估计的优化辅助变量选择

1. 噪声模型参数估计

现在我们来考虑，在参数θ的估值$\hat{\theta}$给定时，用IV法估计（1）式中的参数β问题。我们记

$$\xi_k = y_k - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u_k = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_k, \tag{2}$$

$$\hat{\xi}_k = y_k - \frac{\hat{B}(z^{-1})}{\hat{A}(z^{-1})}u_k. \tag{3}$$

因为$\hat{\xi}_k$与ξ_k之间有误差，可记

$$\hat{\xi}_k = \xi_k + \Delta\xi_k. \tag{4}$$

那么在实际估计时，系统的噪声模型可写为

$$\hat{\xi}_k = \frac{D(z^{-1})}{C(z^{-1})}e_k + \Delta\xi_k,$$

即
$$C(z^{-1})\hat{\xi}_k = D^*(z^{-1})e_k + v_k, \tag{5}$$

其中
$$D^*(z^{-1}) = d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_{nd} z^{-nd}$$
$$v_k = e_k + C(z^{-1})\Delta\xi_k.$$

可将（5）式改写为

$$\hat{\xi}_k = \varphi_k^T\beta + v_k, \tag{6}$$

式中
$$\varphi_k^T = [-\hat{\xi}_{k-1}\cdots-\hat{\xi}_{k-nc}e_{k-1}\cdots e_{k-nd}].$$

选择辅助变量向量为

$$U_k = [-w_{k-1}\cdots-w_{k-nc}e_{k-1}\cdots e_{k-nd}]^T, \tag{7}$$

且假定所选择的辅助变量满足条件：

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}U_k\varphi_k^T = \hat{R}\quad \text{存在且以概率 1非奇异}\\&\text{(ii)}\quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}U_k v_k = 0\quad \text{以概率1成立}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

那么根据文献[3]的分析可知β的IV估计

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{k=1}^{N}U_k\varphi_k^T\right]^{-1}\left[\sum_{k=1}^{N}U_k\hat{\xi}_k\right] \tag{9}$$

为β的一致收敛性估计。

2．噪声模型参数的估计误差

我们假定$\{\Delta\xi_k\}$与$\{e_k\}$是相互独立的白噪声序列。这样考虑的合理性在于，由（2）及（4）式可知，e_k对于$\hat{\xi}_k$的影响都考虑在ξ_k之中。由于IV法对参数θ所给出的估计$\hat{\theta}$服从于渐近正态分布[3]，因此在关于系统（1）式表示的有关假定下[2]，易知$\Delta\xi_k$亦服从渐近正态分布，记为

$$\Delta\xi_k \longrightarrow N(0,\ \sigma^2_{\Delta\xi}). \tag{10}$$

同时由于$\Delta\xi_k$是通过$(\hat{\theta}-\theta)$由（2）—（3）式所引入的，那么即使$(\hat{\theta}-\theta)$的方差较小，然而由于y_k、u_k的加权作用，最后使得$\Delta\xi_k$的方差$\sigma^2_{\Delta\xi}$却可能是足够大的。对于本节1所给出的参数β的估计，我们有

定理 若（1）式中的C、D互质，且选择的辅助变量满足（8）式的两个条件，$(\hat{A},\ \hat{B})$为$(A,\ B)$的渐近一致性估计，则$\sqrt{N}\,(\hat{\beta}-\beta)$为渐近正态分布，其均值为零，协方差矩阵为

$$P = R^{-1}P_0R^{-T} = P_1 + P_2, \tag{11}$$

其中 R由（8）式确定，而

$$P_0 = \sigma^2_e EU_kU_k^T + \sigma^2_{\Delta\xi}E[CU_k][CU_k]^T, \tag{12}$$

$$P_1 = \sigma^2_e[EU_k\varphi_k^T]^{-1}[EU_kU_k^T][EU_k\varphi_k^T]^{-T}, \tag{13}$$

$$P_2 = \sigma^2_{\Delta\xi}[EU_k\varphi_k^T]^{-1}[E(CU_k)(CU_k)^T][EU_k\varphi_k^T]^{-T}, \tag{14}$$

式中 σ^2_e为$\{e_k\}$的方差，其估值记为$\hat{\sigma}^2_e$。

上述定理的证明参阅[4]。

3．优化辅助变量的选择

下面我们以式（11）—（14）的协方差矩阵为尺度来讨论选择优化IV的问题。假定

$$M(z^{-1})w_k = Q(z^{-1})e_k, \tag{15}$$

其中多项式$M(z^{-1})$与$Q(z^{-1})$互质，

$$M(z^{-1}) = 1 + m_1z^{-1} + \cdots + m_{nc}z^{-nc},\quad Q(z^{-1}) = q_0 + q_1z^{-1} + \cdots + q_{n_d}z^{-nd}$$

那么可选择辅助变量向量为

$$U_k = \left[-\frac{Q}{M}e_{k-1}\cdots -\frac{Q}{M}e_{k-nc}e_{k-1}\cdots e_{k-nd}\right]^T$$

$$= \Lambda[-Q,\ M]\left[\frac{1}{M}e_{k-1}\cdots\frac{1}{M}e_{k-nc-nd}\right]^T, \tag{16}$$

其中

$$
\Lambda[-Q,\ M]=\left.\left[\begin{array}{ccc|ccc}
-q_0 & & 0 & 1 & & 0\\
-q_1 & -q_0 & & m_1 & & 1\\
\vdots & -q_1 & & \vdots & & m_1\\
-q_{nd} & \vdots & & m_{nc} & & \\
 & \ddots & & & \ddots & \\
0 & & -q_{nd} & 0 & & m_{nc}
\end{array}\right]\right\} nc+nd
$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{nc}\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{nd}$

由于多项式 $M(z^{-1})$ 与 $Q(z^{-1})$ 互质时，矩阵 $\Lambda[-Q,\ M]$ 非奇异，因此将(16)式代(11)式后可知，式(11)的协方差矩阵的大小与 $\Lambda[-Q,\ M]$ 无关。这样由(16)式可知多项式 $Q(z^{-1})$ 不影响估计精度。因此优化IV的选择问题至此就成了多项式 $M(z^{-1})$ 的选择问题了。

(1) 对于 P_2 的优化选择

由于 U_k 独立于噪声 v_k，因此可用下式的 $\tilde{\varphi}_k$ 来代替(14)式的 φ_k，

$$
\tilde{\varphi}_k^T=\left[-\frac{D^*}{C}e_{k-1}\cdots-\frac{D^*}{C}e_{k-nc}e_{k-1}\cdots e_{k-nd}\right]
$$

$$
=\Lambda^T[-D^*,\ C]U_k^*, \tag{17}
$$

式中 $\Lambda^T[-D^*,\ C]$ 的定义与(16)式的 $\Lambda^T[-Q,\ M]$ 相同，只不过 M 和 Q 在此分别换为 C 和 D^*，而

$$
U_k^*=\left[\frac{1}{C}e_{k-1}\cdots\frac{1}{C}e_{k-nc-nd}\right]^T.
$$

这样将(17)式代入(14)可得

$$
P_2(Q,M,e)=\sigma^2_{\triangle\xi}\Lambda^{-1}[-D^*,C][EU_kU_k^{*T}]^{-1}
$$

$$
\cdot\{E[CU_k][CU_k]^T\}[EU_kU_k^{*T}]^{-T}\Lambda^{-T}[-D^*,\ C],
$$

因为

$$
\begin{bmatrix} C\ U_k \\ \frac{1}{C}U_k^* \end{bmatrix}\left[CU_k^T\ \frac{1}{C}U_k^{*T}\right]\geqslant 0,
$$

所以

$$
P_2(Q,M,e)\geqslant\sigma^2_{\triangle\xi}\Lambda^{-1}[-D^*,C]\left[E\left(\frac{1}{C}U_k^*\right)\left(\frac{1}{C}U_k^*\right)^T\right]^{-1}
$$

$$
\cdot\Lambda^{-T}[-D^*,\ C]=P_2(Q,\ C^2,\ e),
$$

即

$$
P_2(Q,M,e)\geqslant P_2(Q,C^2,e).
$$

因此选择

$$
w_k=\frac{Q(z^{-1})}{C^2(z^{-1})}e_k, \tag{19}
$$

且 Q 与 C^2 互质，则对于 P_2 来说是一种优化的IV；而且这样选择的 w_k 显然满足(8)式的条件。

现在对(19)式做进一步的讨论。因为 $Q(z^{-1})$ 的选择不影响估计精度，因此可选

$Q(z^{-1})=D(z^{-1})$，这样（19）式可写为：

$$w_k=\frac{D(z^{-1})}{C^2(z^{-1})}e_k=\frac{1}{C(z^{-1})}\xi_k \tag{20}$$

显然此式就是〔1〕中所提出的附加辅助变量。对于噪声模型为AR的情况，〔1〕中的仿真结果表明引入（20）式的修改算法，较之精选IV－AML法大大改善了参数的估计精度。而本文的理论分析说明，对于更为一般化的ARMA噪声模型情况（20）式的选择也是优化的。当然在实际算法中只能用$\hat{e}_k$来代替e_k，用$\hat{\xi}_k$来代替ξ_k，$\hat{C}$来代替C，这样会使估计精度有所降低。

（2）对于P_1的优化选择

与前面的推导类似，我们可得出选择：$w_k=Q(z^{-1})/C(z^{-1})e_k$，对于$P_1$来说就是一种优化的IV。更详细的情况可参阅〔4〕。

前面的分析是对（11）式中的P_2和P_1分别进行优化；若要对（11）式的P进行整体优化考虑，那么将使IV的选择变得十分复杂。由前面的分析可知$\sigma^2_{\Delta\xi}$较σ^2_e大，因而从算法的复杂度和准确度折衷考虑，我们认为只要对P_2进行优化而选择（20）式所示的辅助变量即可。

四、精选－优化IV算法及仿真结果

把我们上述对β参数估计采用的优化IV法与对θ参数估计的精选IV法结合起来，就可以得到一种对系统进行参数估计的渐近优化算法。限于篇幅，此处我们不再给出算法的具体表示，有兴趣的读者可参阅〔1〕、〔4〕。

在进行Monte－Carlo仿真试验时我们曾采用了大量的随机模型，限于篇幅只给出了其中两个：

模型 1 $$y_k=\frac{1+0.9z^{-1}+0.15z^{-2}}{1-1.3z^{-1}+0.6z^{-2}}u_k+\frac{1-0.527z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}e_k,$$

模型 2 $$y_k=\frac{z^{-1}+0.5z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.7z^{-2}}u_k+\frac{1-0.37z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.4z^{-2}}e_k.$$

仿真时系统的输入u_k采用伪随机二位式信号（PRBS），噪声e_k用均值为零的正态随机变量。仿真结果列于表1—2中。表中关于信噪比的定义参阅〔1〕。由仿真结果不难看出，

表 1 模型1的仿真结果（N＝200，S＝5）

参数	真 值	精选－优化IV法	精选IV－AML法
a1	－1.3	－1.28106±0.04621	－1.25646±0.09882
a2	0.6	0.59267±0.03013	0.58357±0.07743
b0	1.0	1.09831±0.15338	1.05856±0.13558
b1	0.9	0.86334±0.12333	0.91477±0.15787
b2	0.15	0.24647±0.19795	0.33855±0.22496
c1	－1.0	－0.91834±0.19980	－0.63833±0.23641
c2	0.5	0.44665±0.08448	0.32930±0.07264
d1	－0.527	－0.40786±0.17912	－0.11825±0.20539

表 2　模型2的仿真结果（N＝200，S＝5）

参数	真　值	精选－优化IV法	精选IV－AML法
a1	－1.5	－1.50361±0.04810	－1.50073±0.05055
a2	0.7	0.70592±0.03515	0.69616±0.04704
b0	0.0	0.06266±0.13774	0.12625±0.16782
b1	1.0	0.95970±0.15705	0.90805±0.13002
b2	0.5	0.50800±0.16803	0.49809±0.16650
c1	－0.8	－0.59677±0.17269	－0.58172±0.23924
c2	0.4	0.32829±0.07708	0.23208±0.14007
d1	－0.37	－0.18508±0.20032	－0.00315±0.01266

对于不同的模型，精选－优化 IV 法及精选 IV－AML 法对于系统的输入输出模型参数 a_i，b_i 的估计值都是相当精确的；但是对于噪声模型参数 c_i，d_i的估值，精选－优化 法则明显优于精选 IV－AML 法，其估值更接近于真值。

致谢　感谢姚海彬、杨志泽教授所给的热情支持和帮助。

参 考 文 献

〔1〕 Wang Xian-Lai and Gevers, M., Some modifications on the refined instrumental variable method. INT. J. SYSTEMS SCI. 16: 4. (1985).

〔2〕 Young, P. C. and Jakeman, A., Refined instrumental variable methods of recursive time-series analysis. Part 1, 2 and 3, INT. J. CONTROL, 29: 1, 29: 621 and 31: 741,(1979, 1980).

〔3〕 Soderstrom, T. and Stoica, P., Comparison of some instrumental variable methods-consistency and accuracy aspects. AUTOMATICA, 17: 101,(1981).

〔4〕 姬维君、王先来，时间序列分析的优化辅助变量法，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，安徽·屯溪，（1985.9），311.

Refined-Optimal Instrumental Variable Algorithm and Its Simulation

Wang Xianlai, Ji Weijun
(Department of Automation, Tianjin University)

Abstract

In this paper an optimal selection of instrumental variable for the estimation of noise-model parameters is given. The efficiency of the algorithm is shown by the simulation results which is compared with the refined IV-AML algo-rithm.