第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

复合型分布参数系统的一个最优控制问题

陈云烽

（中山大学数学系，广州）

摘　要

考虑用二阶复合型偏微分方程所描述的分布参数系统，研究了它的一个使平方性能指标达到最小值的边界最优控制问题．在边界值问题的基础上，应用线性算子广义逆的理论，得到最优控制存在的一个充分必要条件，并提供了计算最优控制函数的一个迭代方法，还给出示例．

描述分布参数系统的偏微分方程，除了抛物型、双曲型和椭圆型方程外，还有复合型方程，相比之下，人们对复合型方程的研究，其历史要短得多，对这类系统的控制问题的研究，同样是一个新的课题．作为尝试，本文对一类平面区域上用复合型偏微分方程组所描述的分布参数系统，讨论了它的一个边界最优控制问题．

一、问题的提法

二元两个未知函数的第一类复合型偏微分方程组，经变换可化为如下的标准型[1]

$$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0&1\\b&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0, \tag{1}$$

式中，$b\neq 0$，$\lambda-4b=1$．

如果讨论的区域是单位圆

$$\begin{aligned}\Omega&=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}\\&=\{(r\cos\theta,r\sin\theta)|\,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},\end{aligned} \tag{2}$$

且已知边界条件

$$u|_{x=0}=\phi(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 1, \tag{3}$$

$$v|_{x=0}=\varphi(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 1; \tag{4}$$

$$u|_{r=1}=\chi(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi; \tag{5}$$

这里，$\phi(y)$,$\varphi(y)$分别是三阶和二阶可微函数，而$\chi(\theta)$是连续函数，$\chi(2\pi)=\chi(0)$，则（1）在Ω上有解：[1]

$$u(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(t)\left[x+2\mathrm{Re}\left(e^{it}\ln\left(1-\frac{x}{e^{it}-iy}\right)\right)\right]dt+\phi(y); \tag{6}$$

本文于1986年4月7日收到．1986年11月7日收到修改稿．

$$v(x,y)=-\frac{\lambda}{2}x\left[\psi'(y)+\frac{d}{dy}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(t)\mathrm{Re}(e^{it}\ln(e^{it}-iy))dt\right]$$

$$-\frac{b}{\pi}\int_0^{2\pi}2\chi(t)\mathrm{Im}\left(e^{it}\ln\left(1-\frac{x}{e^{it}-iy}\right)\right)dt+cx+\varphi(y); \qquad (7)$$

式中，c是常数。

如果记

$$A_n(\theta)=\frac{1}{n+1}\left[\cos(n+1)\theta-\cos\frac{n+1}{2}\pi\sin^{n+1}\theta\right], \qquad (8)$$

$$B_n(\theta)=\frac{1}{n+1}\left[\sin(n+1)\theta-\sin\frac{n+1}{2}\pi\sin^{n+1}\theta\right] \qquad (9)$$

$$\hat{A}_n(\theta)=2bB_n(\theta)-\frac{\lambda}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\theta\sin^n\theta, \qquad (10)$$

$$\hat{B}_n(\theta)=-2bA_n(\theta)+\frac{\lambda}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\cos\theta\sin^n\theta; \qquad (11)$$

$$n=0,\ 1,\ 2\cdots,$$

并注意到$\chi(t)$，$t\in[0,\ 2\pi]$的 Fourier 系数

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(t)dt,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(t)\cos ntdt,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi(t)\sin ntdt,\ n=1,\ 2,\ \cdots; \qquad (12)$$

可将（6），（7）式改写成级数形式

$$u(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{\alpha_0}{2}rA_0(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}(\alpha_nA_n(\theta)+\beta_nB_n(\theta))+\psi(r\sin\theta), \qquad (13)$$

$$v(r\cos,\theta r\sin\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}(\alpha_n\hat{A}_n(\theta)+\beta_n\hat{B}_n(\theta))+(cr\cos\theta$$

$$+\varphi(r\sin\theta)-\frac{\lambda}{2}rcs\theta\psi'(r\sin\theta)). \qquad (14)$$

如果在 Hilbert 空间$L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$上定义映射到自身的算子

$$F\triangleq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\begin{pmatrix}0&1\\b&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

由于它是稠定线性算子，有共轭算子F^*存在，故可考虑（1）的弱解，即：

当 u, $v\in L_2(\Omega)$且成立

$$<\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, F^*\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}> = 0, \quad \forall \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \in D(F^*),$$

则称$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$为（1）的弱解．这时，当$\phi(y)$，$\varphi(y)$分别是广义的三阶和二阶可微时，只要$\chi(\cdot)\in L_2[0,2\pi]$，式（13），（14）所示的$u(x,y)$，$v(x,y)$便是方程组（1）关于边界条件（2）～（5）的弱解。今在弱解的意义下讨论系统（1）的如下边界最优控制问题：

问题Q 给定目标分状态$\overline{u}(x,y)$，是Ω上的二阶可微函数，并设在Ω内的支柱$x=0$，$-1\leqslant y\leqslant 1$上，可使状态$u(0,y)=\overline{u}(0,y)$，要求在$L_2[0,2\pi]$内寻找控制函数$\chi^*(\theta)$，使得系统（1）的分状态$u(x,y)$与$\overline{u}(x,y)$有最小的偏差，即使得平方性能指标

$$J[\chi)=\int_\Omega[u(x,y)-\overline{u}(x,y)]^2dxdy \tag{15}$$

在χ^*取最小值．（这里，u与χ的关系如式（13）所示．）这时，称χ^*为问题Q的解或最优控制．

二、最优控制的存在性与算法

定义线性算子T：$L_2[0,2\pi]\to L_2(\Omega)$如下：

$$(T\chi)(r\cos\theta,r\sin\theta)\triangleq\frac{\alpha_0}{2}rA_0(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+1}(\alpha_nA_n(\theta)+\beta_nB_n(\theta)), \tag{16}$$

式中，α_0，α_n，β_n，$n=1, 2, \cdots$是$\chi(\theta)$，$\theta\in[0,2\pi]$的Fourier系数，A_n，B_n如式（8），（9）所示。这时，T有共轭算子T^*：$L_2(\Omega)\to L_2[0,2\pi]$如下：

$$(T^*u)(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{17}$$

式中，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}r^2A_0(\theta)u(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta dr,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}r^{n+2}A_n(\theta)u(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta dr,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}r^{n+2}B_n(\theta)u(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta dr, \quad n=1,2,\cdots; \tag{18}$$

而$u\in D(T^*)$。

根据问题Q的提法，如果记

$$\tilde{u}(x,y)=\overline{u}(x,y)-\overline{u}(0,y), \ (x,y)\in\Omega, \tag{19}$$

则指标 $J[\chi]$ 可写成

$$J[\chi]=\|T\chi-\tilde{u}\|^2。\tag{20}$$

于是，χ^* 是问题 Q 的最优控制等价于

$$\|T\chi^*-\tilde{u}\|\leqslant\|T\chi-\tilde{u}\|,\quad\forall\chi\in L_2[0,2\pi],$$

也即 χ^* 是方程

$$T\chi=\tilde{u}\tag{21}$$

的最小二乘解[2,3]，其解存在的充要条件是 $\tilde{u}\in D(T^+)$，这里，T^+ 是算子 T 的广义逆算子；这时，(21)的最小二乘解的解集为

$$\{\chi^*|\chi^*=T^+\tilde{u}+\chi_0,\ \chi_0\in N(T)\},\tag{22}$$

式中，$N(T)$ 是 T 的化零子空间，而 $T^+\tilde{u}$ 是解集中范数最小的解。

根据[2]中的定理3.1.1，方程(21)存在最小二乘解的充要条件为方程

$$T^*T\chi=T^*\tilde{u}\tag{23}$$

有解。由于 T^*T 是自共轭算子，根据[4]中的定理1、2，方程(23)有解的充要条件是，存在正数 M，使得

$$\langle T^*\tilde{u},\ \chi\rangle\leqslant M\|T^*T\chi\|,\ \forall\chi\in L_2[0,2\pi].\tag{24}$$

所以，有如下定理。

定理 1　问题 Q 存在最优控制的充分必要条件是：$\tilde{u}\in D(T^+)$，或者存在正数 M，使(24)式成立。这时范数最小的最优控制为 $T^+\tilde{u}$；当且仅当 $N(T)=0$，最优控制唯一。

从(16)、(17)式出发，可得算子 T 的范数估计

$$\|T\|^2=\|T^*T\|<\frac{3}{4},$$

根据[3]的命题4.2，当 $\tilde{u}\in D(T^+)$ 时，计算 $T^+\tilde{u}$ 的迭代程序如下：令

$$\chi_0=T^*\tilde{u},$$

$$\chi_m=\left(I-\frac{8}{3}T^*T\right)\chi_{m-1}+\frac{8}{3}T^*\tilde{u},\quad m=1,2,\cdots$$

则有 χ_m 单调地收敛于 $T^+\tilde{u}$，将此程序具体化，得如下定理。

定理 2　如果问题 Q 的最优控制存在，那么范数最小的最优控制函数 $\chi^*(\theta)$ 为

$$\chi^*(\theta)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^*\cos n\theta+\beta_n^*\sin n\theta),\quad\theta\in[0,2\pi];\tag{25}$$

式中，

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha_0^* = \lim\limits_{m\to\infty}\alpha_{0m}, & \alpha_n^* = \lim\limits_{m\to\infty}\alpha_{nm},\\ \beta_n^* = \lim\limits_{m\to\infty}\beta_{nm}; & n=1,\ 2,\ \cdots;\end{array}\right. \tag{26}$$

而

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_{01} = \dfrac{8}{3}\tilde{a}_0, \quad \alpha_{n1} = \dfrac{8}{3}\tilde{a}_n, \quad \beta_{n1} = \dfrac{8}{3}\tilde{b}_n,\\ \alpha_{0m} = \dfrac{8}{3}\tilde{a}_0 + \dfrac{2}{3}\alpha_{0m-1},\\ \alpha_{nm} = \dfrac{8}{3}\tilde{a}_n + \alpha_{nm-1} - \dfrac{8}{3}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{\alpha_{lm-1}}{n+l+4}\eta_{nl},\\ \beta_{nm} = \dfrac{8}{3}\tilde{b}_n + \beta_{nm-1} - \dfrac{8}{3}\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{\beta_{lm-1}}{n+l+4}\xi_{nl},\end{array}\right. \quad n=1,2,\cdots;\ m=2,3,\cdots \tag{27}$$

当中，$\tilde{a}_0$，$\tilde{a}_n$，$\tilde{b}_n, n=1,\ 2,\ \cdots$ 是 $T^*\tilde{u}$ 的 Fourier 系数；而 η_{nl}，ξ_{nl} 如下式

$$\eta_{nl} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A_n(\theta)A_l(\theta)d\theta,$$

$$\xi_{nl} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_n(\theta)B_l(\theta)d\theta; \tag{28}$$

$$n,\ l=1,\ 2,\ \cdots.$$

三、例

例 1 设目标分状态为

$$\tilde{u}(x,y) = (x+y)^2 + x, \qquad (x,y)\in\Omega,$$

则有
$$\tilde{u}(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = A_0(\theta)r + (2A_1(\theta)+2B_1(\theta))r^2,$$

根据式（16）可知 $\tilde{u}\in R(T)$，问题 Q 的最优控制存在，可取为

$$\chi^*(\theta) = 1 + 2(\cos\theta + \sin\theta),\ \theta\in[0,2\pi],$$

且有
$$J[\chi^*] = 0.$$

例 2 设目标分状态为

$$\tilde{u}(x,y) = (x^2+y^2)x + 2y, \qquad (x,y)\in\Omega,$$

则有
$$\tilde{u}(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^3\cos\theta,$$

$T^*\tilde{u}$ 的 Fourier 系数为

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{6}, \quad \tilde{a}_n = \tilde{b}_n = 0, \quad n=1,2,\cdots;$$

只要取 $M=4>0$，则式（24）得以满足，$\tilde{u}\in D(T^+)$，依定理1，问题 Q 的最优控制存在；依定理2可取最优控制函数为

$$\chi^*(\theta)=\frac{2}{3}, \qquad \theta\in[0,2\pi];$$

这时有 $J[\chi^*]=\dfrac{2\pi}{135}$.

参 考 文 献

〔1〕 华罗庚、吴兹潜、林伟，二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，北京，（1979），第八章.

〔2〕 Groetsch, C. W., Generalized Inveses of Linear Operators, Marcel Dekker, Inc. New York, (1977) Chapter III.

〔3〕 Kammerer, W. J. and Nashed, M. Z., Iterative Methods for Best Approximate Solution of Linear Integral Equation of the First and Second Kinds, J. Math. Anal. Appl., 40: 3, (1972), 547-573.

〔4〕 陈云烽，抽象方程的范数最小解及其在分布参数控制系统中的应用，中山大学学报（自然科学版），1，（1983），72-78.

An Optimal Control Problem for Distributed Parameter System of Composed Type

Chen Yunfeng

(Depertment of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

Consider the distributed parameter system described by the second-order partial differential equation of composed type, we discuss its a boundary optimal control problem with quadratic performance. On the basis of the solution to boundary-value problems by using the theory of generolized inverses of the linear operator we obtain the necessary and sufficient condition for the existence of the optimal control. An iterative method of computing the optimal control function is provided. Finally some computational examples are also given.