

对流型热交换器PI反馈控制的稳定性与根轨迹

曹广益

(上海交通大学自控系)

摘要

顺流、对流热交换器是常见的一种热交换器，是典型的分布参数系统。在数学上用偏微分方程描述。从由传递函数得到的频率特性的对数幅相特性来看，对流型的相移特性曲线始终不穿越 -180° 。因此，在生产过程中，大多采用比例校正的方法。为从理论上深入探讨一些问题，我们引入PI校正。本文对引入PI校正后，比例系数 K_p 、特别是积分系数 K_i 对系统稳定性影响进行了分析。研究其 K_p 、 K_i 所构成的稳定边界及系统根轨迹的对应关系。

一、前言

热交换器主要有单管、顺流、对流、直交、混合等各种形式。顺流、对流型热交换器一般有二组管道组成，每组管道各流动不同温度的流体，利用二组流体的流动，通过传热壁进行热的交换。每组管道均有一个输入，一个输出，它的示意图如图1所示。

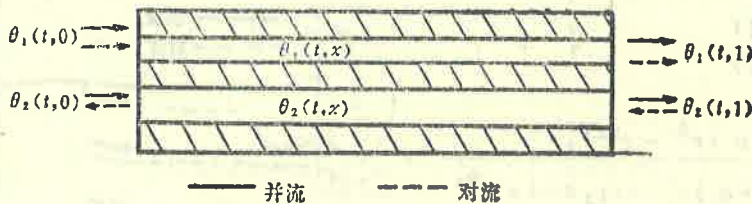


图1 并流、对流热交换器示意图

图中 $\theta_1(t, x)$ 为第一流体的温度， $\theta_2(t, x)$ 为第二流体的温度。距离 x 是无量纲化的。 $\theta_2(t, 0)$ 为输入， $\theta_2(t, 1)$ 为输出。在顺流时 $\theta_1(t, 0)$ 为输入， $\theta_1(t, 1)$ 为输出，而在对流时 $\theta_1(t, 1)$ 为输入， $\theta_1(t, 0)$ 为输出。

本文对对流型热交换器的比例积分校正情况进行初步研究，讨论校正装置的比例系数 K_p ，积分系数 K_i 与系统稳定性以及根轨迹的关系。

二、顺流、对流热交换器的传递函数、根轨迹

首先对图1所示的热交换器作如下的假设：

1. 流体内轴方向的热传导可以忽略;
2. 忽略流体内部半径方向温度分布;
3. 流体密度, 比热为常数;
4. 流体与外壁没有热交换;
5. 传热壁很薄, 忽略其热容量;

这时, 其微分方程式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = a_1(\theta_2 - \theta_1) & (1) \\ R \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \pm \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = a_2(\theta_1 - \theta_2) & (2) \end{cases}$$

其中, a_1 、 a_2 是与结构、材料、流速、流体等有关综合参数, R 为第二流体与第一流体流速之比。(2)式中 \pm 号的 $+$ 号表示顺流, $-$ 号表示对流。

对(1)、(2)式进行拉氏变换, 可得初始条件为零的, 输出对于输入传递函数为:

顺流时

$$W_1(s) = \frac{\theta_1(s, 1)}{\theta_2(s, 0)} = \frac{a_1(e^{p_1} - e^{p_2})}{p_1 - p_2} \quad (3)$$

其中, p_1 、 p_2 为方程 $p^2 + (s + a_1 + Rs + a_2)p + (a_2s + Rs^2 + a_1Rs) = 0$ 的根。

对流时

$$\begin{aligned} W_2(s) &= \frac{\theta_1(s, 1)}{\theta_2(s, 1)} \\ &= \frac{a_1(e^{p_1} - e^{p_2})}{(p_1 + s + a_1)e^{p_1} - (p_2 + s + a_2)e^{p_2}} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, p_1 、 p_2 为方程 $p^2 + (s - a_2 - Rs + a_1)p - (a_2s + Rs^2 + a_1Rs) = 0$ 的根。

图2表示了顺流及对流型的根轨迹, 从图中可知, 顺流型根轨迹都从负无穷出发, 其中一部分轨迹穿过虚轴趋向正无穷, 一部分终止于左半平面的零点。依参数不同, 零点也可能在右半平面, 也可能没有零点。在对流型时, 根轨迹一般从左半平面的极点出发, 终止于左半平面的零点, 这与幅相对数频率特性相对应, 其相频率特性始终不穿越 -180° 线。同时, 负实轴上也有极点, 因

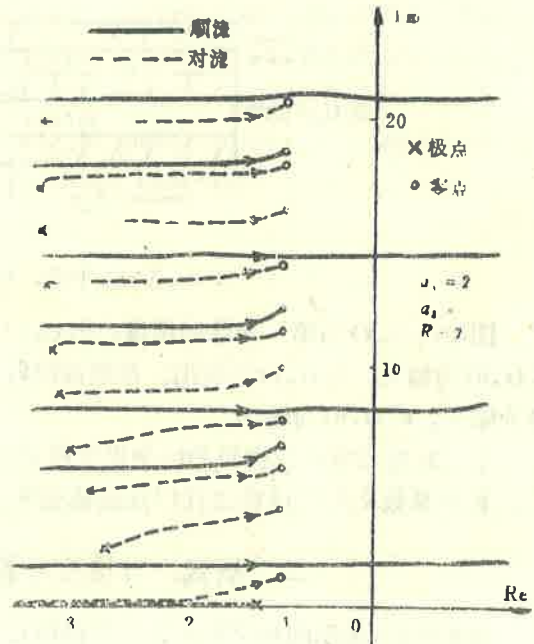


图2 顺流对流热交换器根轨迹图

此负实轴上也有根轨迹。

三、PI反馈的稳定边界计算

PI校正时，其串联校正装置的传递函数为 $K_P + \frac{K_I}{s}$ ，其中 K_P 为比例系数， K_I 为积分系数。当对流型热交换器的传递函数设为 $W_2(s)$ 时，其闭环传递函数的特征方程如下：

$$F(s) = 1 + (K_P + K_I/s)W_2(s) \tag{5}$$

首先讨论稳定边界。从根轨迹的角度来考虑，即为其位于虚轴上时所取的值。当然，当 a_1 、 a_2 、 R 这三个数不同时，其稳定边界也不同。

这里，设 $s = j\omega$ ，令 ω 从零 $\rightarrow \infty$ ，代入 (5) 式，即可求得一组 K_P 、 K_I 的关系。图 3 表示了三组不同 a_1 、 a_2 、 R 时的稳定边界。其形状如同自下而上渐渐变大的螺旋线。

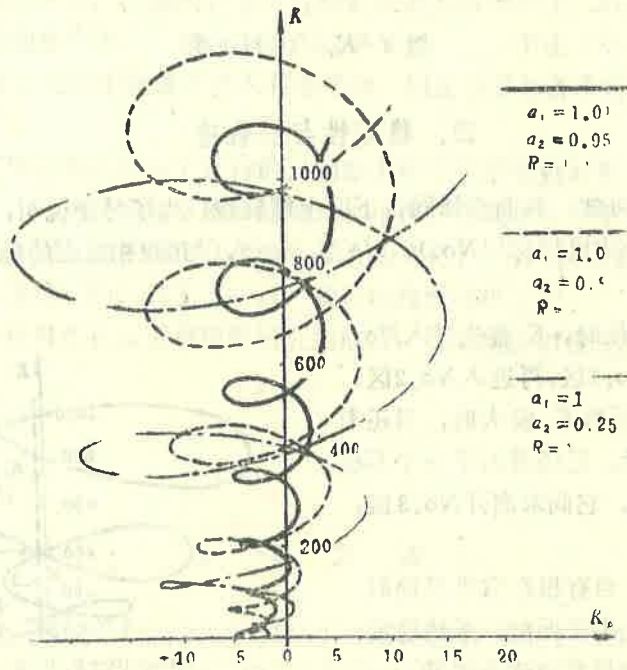


图 3 不同参数时对流型稳定边界

这里着重讨论 K_I 的影响，为此，把 K_P 固定，即可求出 K_I 变化时的根轨迹。为了易于说明，这里令 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 0.25$ ， $R = 1$ ，当 $K_P = 1$ 时，其根轨迹如图 4 所示。

由于分布参数系统是无限维的，具有无限多的根轨迹，这仅从下到上列出 6 条根轨迹，并标以 $No.1$ ， $No.2$ ，…… $No.6$ 。由这六条根轨迹，可以看出整个无限多根轨迹的分布趋势，掌握整系统的特性。

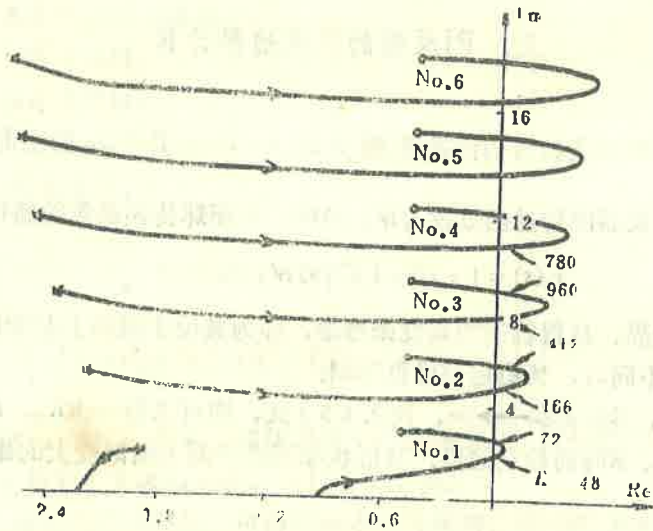


图 4 $K_p = 1$ 时根轨迹

四、稳定性与根轨迹

从稳定边界图图3可知，其曲线如同自下而上螺旋线，为了易于说明，我们把这个曲线自下而上所围成的不稳定区域标以No.1, No.2, ……，与图4相对应的稳定边界曲线重画于图5。

这时 K_i 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时， K_i 首先进入No.1不稳定区，接着脱离No.1区，再进入No.2区，又脱离No.2区，……而当 K_i 较大时，当还未脱离上一个不稳定区时，已经进入下一个不稳定区了。如 $K_i = 780$ 时，它尚未离开No.3区，却已进入No.4区中了。

从控制原理可知，当有根在右半平面时，系统不稳定，而根在左半平面时，系统稳定。对照图4与图5可以清楚看到这个关系。

当 K_i 从零 $\rightarrow 48$ 左右时， K_i 位于稳定区域，所有的根都在左半平面，当 $K_i > 48$ 时， K_i 进入

No.1区，对应的根轨迹No.1进入右半平面，而当 $K_i > 72$ 时， K_i 从No.1区离开，对应的根轨迹No.1也回到了左半平面。 K_i 继续增大而仍处于稳定区域时，所有根轨迹在左半平面。当 K_i 增大到166时， K_i 进入No.2不稳定区，这时对应的根轨迹No.2也进入右半平面，而 K_i 为412左右时，正好No.2, No.3的区域边界上，相应的根轨迹No.2, No.3也位于虚轴上，当 K_i 再增加的话， K_i 脱离No.2而进入No.3，相应的根轨迹No.2回到左半平面，而根轨迹No.3

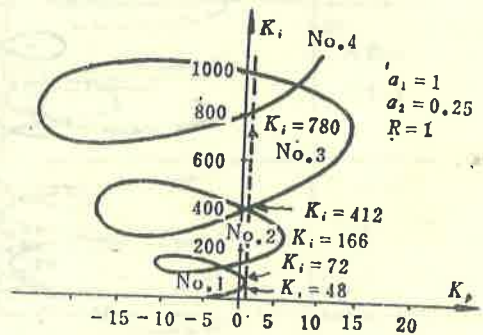


图 5 对应图4的稳定边界曲线

进入右半平面。在 $K_i = 800$ 时, K_i 同时处于No.3, No.4区域中,相应的根轨迹都在右半平面。

从理论上说, $K_i \rightarrow \infty$ 时,根轨迹都回到处于左半平面的系统零点,但由于这是无法实现的,因此不管 K_i 如何的大,由于根轨迹有无穷多,总是有根轨迹在右半平面,因此系统总是不稳定的。

当 $K_p = 10$ 或 20 时,我们同样得到一组曲线,也可得到如上结论。

当 $K_p = 10$ 时,由图5可知, K_i 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化过程中,不进入No.1, No.2区,因此对应的自下而上的第一条,第二条根轨迹不进入右半平面,其余变化与上述相同。

当 $K_p = 20$ 时,由图5可知, K_i 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化过程中,不进入No.1, No.2, No.3区,因此对应的自下而上的第一、第二、第三条根轨迹不进入右半平面,其余变化与上述相同。

五、结 束 语

从以上讨论可知,在对流型热交换器中,进行PI校正时,在 K_p 固定, K_i 变化情况下,稳定与不稳定情况相互交叉, K_i 越大,总是有根轨迹进入右半平面,系统趋向不稳定。随着 K_i 的增加,从下向上的根轨迹一个接一个进入右半平面,又一个接一个返回左半平面。而依 K_p 的增加,一些接近实轴的根轨迹不进入右半平面。稳定边界与各个根轨迹有一一对应关系。

以上讨论是在某些假设的条件下进行的。例如忽略传热壁的热容量等。如果考虑到传热壁的影响,对照图2,其对流型热交换器的根轨迹不再只出现在左半平面,也可能穿越虚轴,而进入右半平面。PI校正的稳定边界也有很大的变化,不再是 K_p 越大稳定性越好,而是相应在某一定范围内是稳定的。对于这一点,我们还将继续研究。

致谢 本研究系作者在日本进修期间研究的成果,得到增渊教授及嘉纳教授热诚帮助,在此表示深切感谢。

参 考 文 献

- (1) 增渊正美,热交换器,その动特性と制御,计测と制御,昭和52年2月。
- (2) 嘉纳秀明,分布系の周波数領域での特性と制御问题, SICE夏期セミナー, 1986年7月13日—18日。
- (3) 嘉纳秀明,根轨迹による分布系热交换器の分类,第24回自动控制连合讲演会,昭和56年11月21日—23日。

Stability and Root-loci of Counter Flow Heat Exchanger PI Feedback Control

Cao Guangyi

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University)

Abstract

Parallel and counter flow heat exchangers are ordinary types of heat exchangers, they are typical distributed parameter systems. It can be seen from the frequency response characteristics that the phase plots of the parallel heat exchangers never cross the -180° line. Therefore proportional control is usually used in such system. In order to improve system performance, in this paper we use both proportional and integral control, and discuss the effect of the values of the Proportional constant K_p and especially the integral constant K_i with respect to system stability. The stability boundary relative to K_p and K_i as well as the corresponding relationship between the stability boundary and the root-locus of the system are also investigated.