

基于奇异值性能指标的鲁棒控制器设计

汪自勤 胡克定 钱钟韩

(东南大学自动化研究所, 南京)

摘 要

本文提出了一种在整个频率范围内同时调整灵敏度矩阵和闭环传递矩阵最大奇异值的方法, 从而得到了一种鲁棒控制器的频域综合技术。它可以同时考虑系统的鲁棒稳定性, 输入-输出性能和渐近跟踪要求。本文还以一个例子说明了设计过程。

一、预 备 知 识

近年来有许多用频域矩阵奇异值不等式进行系统性能分析的文章, 例如[1—5], 且得出了一些重要结果。在这些结果的基础上, 一些文献^[6-8]讨论了最优灵敏度综合和最优鲁棒性综合问题。但迄今为止, 仍没有一种能同时考虑两者的方法。本文提出一种实用的鲁棒控制器设计方法—主导增益法, 它可以同时考虑系统的鲁棒稳定性、输入-输出性能和渐近跟踪要求。

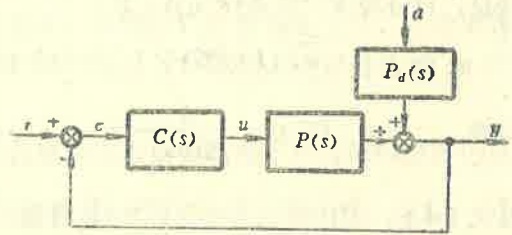


图 1 反馈系统

考虑图 1 所示反馈系统, 向量 r 、 u 、 y 和 d 分别为参考输入、控制输入、输出和干扰。 $C^{m \times 1}(s)$ 为控制器, $P^{1 \times m}(s)$

为对象输入输出通道的传递矩阵, $P_d(s)$ 为对象干扰通道的传递矩阵。假定对象输入输出通道的真实特性为 $P_t(s)$, 于是存在 $\Delta P^{1 \times 1}(s)$ 满足

$$P_t(s) = (I + \Delta P)P(s), \quad (1)$$

ΔP 被称为模型不确定性, 我们假定 ΔP 是渐近稳定的。因此, 系统的设计问题可归结为求取补偿器 $C(s)$, 使闭环系统满足^[1, 9]。

$$\text{鲁棒稳定条件} \quad \overline{\sigma}[(I + PC)^{-1}PC] < \frac{1}{\overline{\sigma}(\Delta P)}, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{输入输出性能} \quad \overline{\sigma}[(I + PC)^{-1}] < PS(\omega), \quad \forall \omega \geq 0, \quad (3)$$

$$\text{渐近跟踪要求} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (4)$$

本文曾在一九八六年全国自动化学会“控制理论与应用”年会(牡丹江)上宣读, 本文于1986年8月5日收到, 1987年7月31日收到修改稿。

在本文中 $\overline{\sigma}(A)$ 、 $\underline{\sigma}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最大和最小奇异值。因此标称闭环传递矩阵 $T(s) = (I + PC)^{-1}PC$ 的最大奇异值 $\overline{\sigma}(T)$ 以及灵敏度矩阵 $S = (I + PC)^{-1}$ 的最大奇异值 $\overline{\sigma}(S)$ 分别反映了系统的鲁棒稳定性和输入输出性能。式(3)中 $PS(\omega)$ 为一事先给定的指标。

二、设计方法

综上所述,若 $\overline{\sigma}(T)$ 和 $\overline{\sigma}(S)$ 对所有 ω 都很小 ($\ll 1$), 系统将同时具有很好的响应和鲁棒稳定性。但是由于有

$$(I + PC)^{-1}PC + (I + PC)^{-1} = I, \quad (5)$$

故对任一 ω , $\overline{\sigma}(T)$ 、 $\overline{\sigma}(S)$ 不可能都很小, 只能折衷考虑。本文提出了按频率分段同时调整 $\overline{\sigma}(T)$ 和 $\overline{\sigma}(S)$ 的设计思想。

1. 低频段的直接调整

在低频段模型不确定性比较小, 假定低频模型不确定性小于1, 于是式(2)在低频段自动满足, 设计要求可仅表示为式(3)

$$\overline{\sigma}[(I + PC)^{-1}] < PS(\omega) \ll 1 \quad \forall \omega \in [0, \omega_d], \quad (6)$$

$$\text{近似地} \quad \underline{\sigma}(PC) > \frac{1}{PS(\omega)} \gg 1 \quad \forall \omega \in [0, \omega_d], \quad (7)$$

以及式(4)。因此在低频段可以直接调整 $\overline{\sigma}(S)$, 由于这时对象频率特性随频率 ω 的变化幅度不大, 直接调整不仅方便, 而且精度较高。

具体方法是: 对于稳定的 $P(s)$, 取 $K_1 = P^+(0)$, $P^+(0)$ 为 $P(0)$ 的右逆。于是 PK_1 在 $\omega = 0$ 处为单位阵, 在整个低频段近似地为单位阵。若再取 $K_2 = k_2(s)I$, 且

$$|k_2(j\omega)| > \frac{1}{PS(\omega)} \quad \forall \omega \in [0, \omega_d], \quad (8)$$

$$\text{则有} \quad \overline{\sigma}(PK_1K_2) \approx \underline{\sigma}(PK_1K_2) \approx |k_2(j\omega)| > \frac{1}{PS(\omega)}, \quad \forall \omega \in [0, \omega_d] \quad (9)$$

低频段设计要求就得到了满足。当要求渐近跟踪时, K_2 中应含有满足内模原理的伺服补偿器。

当低频段根据输入输出特性进行调整时, 虽然鲁棒稳定性要求在低频段可以自动满足, 但是在中高频段 $\overline{\sigma}(\Delta P)$ 很大, 此时式(2)近似为

$$\overline{\sigma}(PC) < \frac{1}{\overline{\sigma}(\Delta P)} \ll 1 \quad \forall \omega \in (\omega_g, \infty). \quad (10)$$

当低频要求过高时, (10)式有可能无法得到满足, 从而导致高频段鲁棒稳定性达不到要

求。因此,为了增加设计的灵活性,引进一比例因子 K_3 。对输入输出性能和鲁棒稳定性要求进行协调。当式(10)得不到满足时,就应降低 K_3 ,即适当降低开环增益。 K_3 的大小基本上决定了系统的带宽,而由式(10)知系统的带宽要受模型不确定性的限制。因此,

$\overline{\sigma}(\Delta P)$ 规定了 K_3 的一个上界。整个控制器 $C(s)$ 可以表示为

$$C(s) = K_1 K_2(s) K_3 K_4(s), \quad (11)$$

其中, $K_4(s)$ 是用来对中高端段进行补偿的。为了不影响已调整好的低频段,要求 $K_4(0) = I$ 。

2. 中高端段的优化调整

对于中高端段, $\overline{\sigma}(S)$ 和 $\overline{\sigma}(T)$ 与 $\overline{\sigma}(PC)$ 、 $\underline{\sigma}(PC)$ 之间不存在任何简单关系,且对象特性随频率 ω 变化很大,因此直接调整很困难。另一方面,中高端段模型不确定性较大,应把鲁棒稳定性放在首位考虑。因此对于某一取定形式的 $K_4(s)$ 。通过对式(2)的性能指标进行优化

$$\min_{K_4(s)} J = \min_{K_4(s)} \max_{\omega} [\overline{\sigma}(T) \overline{\sigma}(\Delta P)] \quad (12)$$

来确定 $K_4(s)$ 的参数,将使反馈系统获得最优鲁棒稳定性。若最优值 $J^* < 1$,则鲁棒稳定性要求得到满足;否则说明此形式的 K_4 无法满足要求,应增加 K_4 的结构复杂性,当然依靠这一方法来提高系统的性能是有限度的,因为系统的可达性能受到模型不确定性的限制^[2]。另一途径就是调整 K_3 来折衷,如前所述。

参考输入 r 和干扰 $P_d \cdot d$ 一般是低频信号,因此系统响应主要取决于系统频率特性的低频段,但一般仍要求 $\overline{\sigma}(S)$ 在中频段不要太大。幸运的是,在中频段只要 $\overline{\sigma}(T)$ 不大, $\sigma(S)$ 就不大。这是因为优化 J 的结果一般都使 $\overline{\sigma}(PC)$ 和 $\underline{\sigma}(PC)$ 在中频段即剪切频率附近相互靠近,这时有

$$\overline{\sigma}(PC) \approx \underline{\sigma}(PC) \approx 1, \quad (13)$$

$$\text{又} \quad \overline{\sigma}(T) / \overline{\sigma}(PC) \leq \overline{\sigma}(S) \leq \overline{\sigma}(T) / \underline{\sigma}(PC). \quad (14)$$

$$\text{故在中频段} \quad \overline{\sigma}(T) \approx \overline{\sigma}(S). \quad (15)$$

因此用优化法在中频段同时调整了 $\overline{\sigma}(S)$ 和 $\overline{\sigma}(T)$ 。

$K_4(s)$ 的形式可以任意选取。这时,可以先作出 PK_1K_2 的频率特性图,包括奇异值和特征值特性,特征值频率特性主要用来判别闭环稳定性。从 PK_1K_2 的频率特性图上可以看出系统还需要什么补偿,从而大致可确定 K_3 的取值和 $K_4(s)$ 的形式。

综合1、2就得到了一种直接调整和优化相结合的鲁棒控制器设计方法,我们称之为主导增益法,因为[3]曾把频域矩阵奇异值称之为主导增益。

3. 评说与讨论

1) 由于(2)式的鲁棒稳定性是以标称闭环系统稳定为前提的,因此式(12)的优化过

程必须满足稳定性约束条件。但在具体计算中，只要先找出一组稳定的 $K_4(s)$ 的参数（一般来说这是不难的），且步长选取合适，则 $K_4(s)$ 的参数在优化过程中就不会从稳定区域跳入不稳定区域，从而也就无须考虑约束条件。

2) J 的最小点一般不唯一，可以选择几组不同的起始参数并从不同方向进行搜索。

3) 目标函数 $J = \max_{\omega} (\overline{\sigma}(T) \overline{\sigma}(\Delta P))$ 的计算，由于低频段 $\overline{\sigma}(\Delta P)$ 很小，高频段 $\overline{\sigma}(T)$ 很小，因此实际所考虑的仅是一有限频率区间。

四、举 例

对于[1]中的传递矩阵

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}$$

设系统的模型不确定性取

$$\overline{\sigma}(\Delta G) = |0.5(1 + 0.5j\omega)|,$$

在低频段 $\overline{\sigma}(\Delta G) \approx 0.5 < 1$ ，系统的输入输出数相等，无传输零点，因此满足主导增益法的条件和渐近跟踪要求的条件。

取 $K_1 = G^{-1}(0) = I,$

为满足渐近跟踪阶跃信号的要求，取 $K_2 = \frac{1}{s} I.$

GK_1K_2 的频率特性示于图 2，可见在中高频段 $\overline{\sigma}(GK_1K_2)$ 和 $\underline{\sigma}(GK_1K_2)$ 相差很大，应使它们互相靠近。因此取

$$K_3 = 1, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 1+k_{11}s & k_{12}s \\ k_{21}s & 1+k_{22}s \end{bmatrix}$$

通过优化(12)式求得 $(k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}) = (25, -28, 21, -23.5)$

且 $J^* = 0.5 < 1.$

因此对于给定的 $\overline{\sigma}(\Delta G)$ ，系统满足鲁棒稳定性要求且有余量。

系统的频率特性如图3(a)，(b)，(c)所示。由(a)知标称闭环系统稳定，(b)和(c)则分别说明闭环系统有好的输入输出性能和鲁棒稳定性。控制器为比例积分型

$$C(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1+25s & -28s \\ 21s & 1-23.5s \end{bmatrix}$$

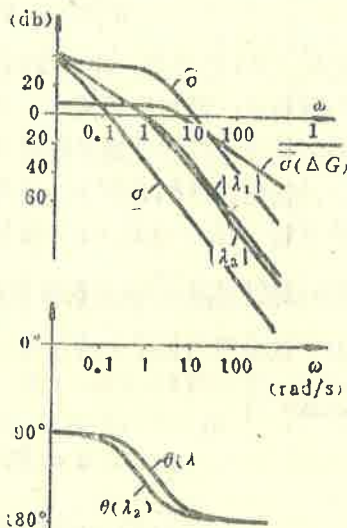


图 2 GK_1K_2 的频率特性

注： $\overline{\sigma}$ 为最大最小奇异值； λ_i 为特征值； $|\lambda_i|$ 、 $\theta(\lambda_i)$ 为 λ_i 的幅值和相位

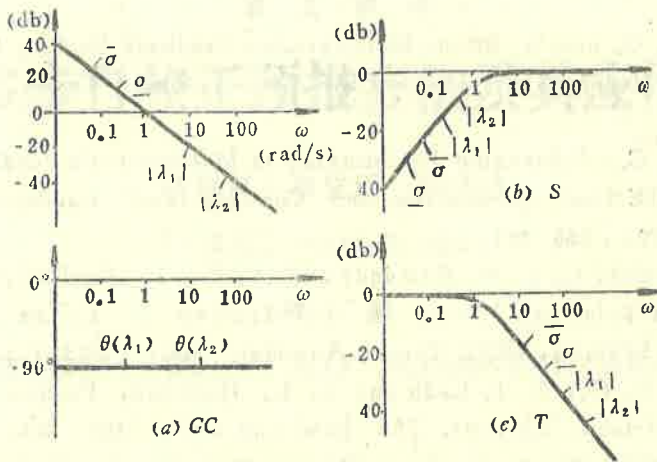


图 3 用主导增益法设计的系统频率特性

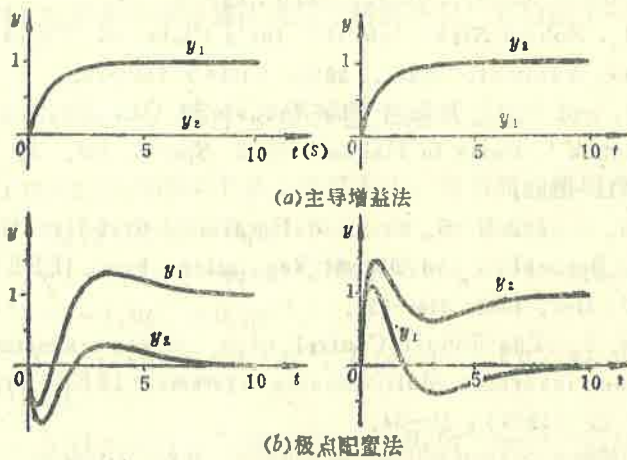


图 4 单位阶跃响应

参考输入阶跃变化时系统的响应如图 4 所示，作为比较，图上也给出用极点配置法得到的响应曲线，它和主导增益法具有相同的闭环极点 $(-1, -1, -1, -2)$ ，但从图上明显可见其性能不如主导增益法。如果对极点配置法也画出相应的 $\bar{\sigma}(T)$ 和 $\bar{\sigma}(S)$ 图，则可更清楚地看到这一点。

四、结 束 语

主导增益法实质上是经典频域法在多变量系统中的一种推广，通过对不同频段的不同处理，实现对 $\bar{\sigma}(T)$ 和 $\bar{\sigma}(S)$ 的同时调整，理论分析和例子都表明这是一种行之有效的方法。虽然如此，由于 (2) 式仅是充分条件，因此一般都或多或少具有保守性，这有待于进一步研究解决。

参 考 文 献

- [1] Doyle, J. C. and G. Stein, Multivariable Feedback Design, Concepts for a Classical/Modern Synthesis, IEEE Trans. Automat. Contr., 26:2, (1981), 4—16.
- [2] Doyle, J. C., Achievable Performance in Multivariable Feedback Systems, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Fort Lauderdale, Florida, Dec., (1979), 250—251.
- [3] Postlethwaite, I., J. M. Edmunds and A. G. J. MacFarlane, Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 26:2, (1981), 32—46.
- [4] Safonov, M. G., A. J. Laub and G. L. Hartman, Feedback Properties of Multivariable Systems, The Role and use of the Return Difference Matrix, IEEE Trans. Automat. Contr., 26:2, (1981), 47—65.
- [5] Cruz, J. B. JR., J. S. Freudenberg and D. P. Looze, A Relationship between Sensitivity and Stability of Mufivariable Feedback systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 26:2, (1981), 66—74.
- [6] Kimura, H., Robust Stabilizability for a Class of Transfer Functions, IEEE Trans. Automat. Contr., 29:9, (1984) 788—793.
- [7] Chen, B. S. and C. C. Kung, The Robustness OPTimization of a Multivariable Feedback Systems in Hankel Norm Space, Int. J. Contr., 39:6, (1984), 1211—1228.
- [8] Safonov, M. G. and B. S. Chen, Multivariable Stability Margins Optimization with Decoupling and Output Regulation, Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Dec. 1982, 616—622.
- [9] Davison, E. J., The Robust Control of a Servomechanism Problem for Linear Time-invariant Multivariable systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 21: 2, (1976), 24—34.
- [10] 黄琳, 系统与控制理论中的线性代数, 科学出版社, 北京, (1984)。

Design of a Robust Controller Based on the Singular Value Performances

Wang Ziqin, Hu Keding and Qian Zhonghan

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing)

Abstract

In this paper we present a method to adjust the largest singular value of the sensitivity matrix and that of the closed-loop transfer matrix simultaneously to meet given inequality constraints in the whole frequency domain. This gives a method for the design of a robust controller in frequency domain, which takes into consideration robust stability, input-output behavior and asymptotic tracking. An example is given to illustrate the design procedure.