第7卷 第1期
1990年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.1
Mar., 1990

扰动下线性二次型反馈调节器的鲁棒性与灵敏度

潘胜强

（厦门大学计算机与系统科学系）

摘要 本文考虑定常线性系统的两类扰动，利用二次型反馈调节器分别得到其鲁棒性与灵敏度的结果.

关键词: 扰动；线性二次型调节器；鲁棒稳定性；灵敏度

1. 引 言

利用线性二次指标下状态反馈调节器来研究系统的鲁棒性和灵敏度是一种较好的方法[1]. Kalman[2] 对单入单出情形进行了研究，得到具无限增益域，至少 $\pm 60°$ 的象域和 50%的增益降低忍耐性. Anderson and Moore[3] 对此作了进一步的研究. Safobov and Athans[4] 对多变量系统得到了与 Kalman 类似的结果. 以上均只考虑反馈回路的扰动. Zheng[5] 考虑了线性二次型调节器下系统对参数的优化问题，Katayama and Sasaki[6] 将[4]的结果作了进一步的推广. 本文试图在[4][5]基础上考虑. 而与[6]不一样.

2. 问题的描述

我们知道线性定常系统:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

这里 $x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$. 在如下二次性能指标下：

$$J(x,\ u)=\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt,\quad (Q\geqslant 0,\ R>0), \tag{2}$$

使 $J(x,\ u)$ 达极小的最优控制律为

$$u^*(t)=-Hx^*(t)\equiv -R^{-1}B^TPx^*(t), \tag{3}$$

其中 $x^*(t)$ 满足

$$\frac{d}{dt}x^*(t)=Ax^*(t)+Bu^*(t),\quad x^*(0)=x_0. \tag{4}$$

$H=R^{-1}B^TP$ 称为反馈增益. P 为下面 Riccati 方程的解：

$$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0. \tag{5}$$

Kwakernaak and Sivan[7] 证明了 Riccati 方程 [5] 有唯一非负定解且使闭环系统 (3)(4) 稳定的充要条件是 $(A,\ B)$ 能稳，$(\sqrt{Q},\ A)$ 能检测①. 而且这时

本文于 1988 年 7 月 1 日收到. 1989 年 3 月 21 日收到修改稿.

$$J(x^*, u^*) = x_0^T P x_0. \tag{6}$$

现在考虑 (1) 的如下两类扰动.

$$\left(\tilde{\Sigma}_1\right)\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + F(\tilde{x}(t), t) + BG(\tilde{u}(t), t), \ \tilde{x}(0) = x_0, & (7)\\ \tilde{u}(t) = -H\tilde{x}(t). & (8)\end{cases}$$

上式中 $F: R^n \times R \to R^n$, $G: R^m \times R \to R^m$ 为线性或非线性，时变或非时变无记忆扰动算子[②]，且满足一致李普希兹条件，即存在 $C > 0$，使

$$\|F(\tilde{x}(t), t) - F(\tilde{y}(t), t)\| \leqslant C\|\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)\|, \ \tilde{x}(t), \tilde{y}(t) \in R^n, \ t > 0, \tag{9}$$

$$\|G(\tilde{u}(t), t) - G(\tilde{v}(t), t)\| \leqslant C\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)\|, \ \tilde{u}(t), \tilde{v}(t) \in R^m, \ t > 0, \tag{10}$$

且设 $F(0, t) = 0$, $G(0, t) = 0$.

$$\left(\tilde{\Sigma}_2\right)\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\tilde{x}(t) = A\tilde{x}(t) + \int_0^t F(t-\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau + B\int_0^t G(t-\tau)\tilde{u}(\tau)d\tau, \ t > 0, & (11)\\ \tilde{u}(t) = -H\tilde{x}(t), \ \tilde{x}(0) = x_0, & (12)\end{cases}$$

这里 F、$G \in L^2[0, \infty)$.

我们的目的是考虑扰动系统 $\left(\tilde{\Sigma}_1\right)$, $\left(\tilde{\Sigma}_2\right)$ 的鲁棒性与灵敏度.

2. 主要结果

对于扰动系统 $\left(\tilde{\Sigma}_1\right)$，我们有如下结果：

定理 1　如果扰动 $F(\cdot, \cdot)$, $G(\cdot, \cdot)$，满足 $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$:

$$2\tilde{x}^T(t)PF(\tilde{x}(t), t) \leqslant \alpha\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t), \ t > 0, \tag{13}$$

$$\tilde{u}^T(t)RG(\tilde{u}(t), t) \geqslant \frac{1+\beta}{2}\tilde{u}^T(t)R\tilde{u}(t), \ t > 0, \tag{14}$$

且 (A, B) 能稳，$\left(\sqrt{Q}, \tilde{\Sigma}_1\right)$ 能检测，那么:

(i) $J(x^*, u^*) \geqslant \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \beta\tilde{u}^T(t)R\tilde{u}(t)]dt,$ (15)

(ii) 系统 $\left(\tilde{\Sigma}_1\right)$ 是大范围渐近稳定的且 $\tilde{x}$ 均方可积.

在我们证明之前，先看一看条件 (13)(14). (13) 是说对系统本身的扰动不能太大，在数学上类似于 $\|F(\tilde{x}(t), t)\| \leqslant \frac{\|Q\|}{2\|P\|}\|\tilde{x}(t)\|$. (14) 是说反馈回路的扰动要比较大，在数学上类似于 $\|G(\tilde{u}(t), t)\| \geqslant \frac{1+\beta}{2\|R\|}\|Q\| \cdot \|\tilde{u}(t)\| = \frac{1+\beta}{2\|R\|}\|Q\| \cdot \|R^{-1}B^TP\tilde{x}(t)\|$.

证 $J(x^*, u^*) = x_0^T P x_0$

$$= \tilde{x}^T(\tau)P\tilde{x}(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt}[\tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)]dt \text{ (对任意 } \tau>0)$$

$$= \tilde{x}^T(\tau)p\tilde{x}(\tau) - 2\int_0^\tau \tilde{x}^T(t)P[A\tilde{x}(t) + F(\tilde{x}(t), t) + BG(\tilde{u}(t), t)]dt$$

$$\geqslant -\int_0^\tau \tilde{x}^T(t)\{[PA + A^T P]\tilde{x}(t) + 2PF(\tilde{x}(t), t) + 2PBG(\tilde{u}(t), t)\}dt$$

$$= \int_0^\tau \tilde{x}^T(t)\{[Q - PBR^{-1}B^T P]\tilde{x}(t) - 2PF(\tilde{x}(t), t) - 2PBG(\tilde{u}(t), t)\}dt$$

$$= \int_0^{-\tau}\{\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + [\alpha\tilde{x}^T(t)Q\tilde{x}(t) - 2PF(\tilde{x}(t), t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)$$

$$+ \tilde{u}^T(t)E(1+\beta)R\tilde{u}(t) + 2RG(\tilde{u}(t), t)]\}dt.$$

由 (13)(14) 得：

$$J(x^*, u^*) \geqslant \int_0^\tau [\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt \quad \text{对任意 } \tau>0.$$

令 $\tau \to \infty$ 得：

$$J(x^*, u^*) \geqslant \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt.$$

于是 (i) 得证：下面证明 (ii).

如果$\tilde{x}$ 不是均方可积的，那么由$\left(\sqrt{Q}, \tilde{\sum}_1\right)$是可检测的知$\sqrt{Q}\,\tilde{x}$ 也不是均方可积的，这与 (15) 矛盾，故$\tilde{x}$ 是均方可积的．而 F、G 是有限增益的，这是由于 F、G 满足一致李普希兹条件且 $F(0, t)=0$, $G(0, t)=0$. 因而由 A、B、F、G 是有限增益的及$\tilde{x}$ 是均方可积的得$\dot{\tilde{x}}$ 也是均方可积的．于是由 Desoer and Vidyasagar [8] 知$\tilde{x}(t)$ 是渐近稳定的．由于 x_0 是任取的，因此$\left(\tilde{\sum}_1\right)$是大范围渐近稳定的．故 (ii) 得证．

现在考虑扰动系统$\left(\tilde{\sum}_2\right)$的扰动性能：

定理 2 如果$\left(\tilde{\sum}_2\right)$的扰动满足$0<\alpha<1$, $\beta>0$:

$$PF_f(j\omega) + F_f^H(j\omega)P \leqslant \alpha Q^{③}, \tag{16}$$

$$RG_f(j\omega) + G_f^H(j\omega)R \geqslant (1+\beta)R, \tag{17}$$

上式中 $F_f(j\omega)$, $G_f(j\omega)$ 表示 F、G 的 Fourier 变换，而 (A, B) 能稳，$\left(\sqrt{Q}, \tilde{\sum}_2\right)$能检测，那么有:

(i) $$J(x^*, u^*) \geqslant \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt, \tag{18}$$

(ii) $\left(\tilde{\Sigma}_2\right)$是大范围渐近稳定的，且$\tilde{x}$ 均方可积.

在考虑证明之前，我们先来看一看条件(16)(17)的物理意义，(16)说明扰动累加核 F 和频率特征的实部在一定指标体系下相对较小，而(17)说明 G 的频率特征的实部相对较大．而实际系统中是普遍存在这种现象的．

证　由于

$$J(x^*, u^*) = x_0^T P x_0 = x^T(0)Px(0)$$

$$= \tilde{x}^T(\tau)P\tilde{x}(\tau) - \int_0^\tau \frac{d}{dt}[\tilde{x}^T(t)P\tilde{x}(t)]dt \quad (\text{对任意 } \tau>0)$$

$$= \tilde{x}^T(\tau)P\tilde{x}(\tau) - 2\int_0^\tau > \tilde{x}(t),\ P[A\tilde{x}(t) + \int_0^t F(t-s)\tilde{x}(s)ds$$

$$+ B\int_0^t G(t-s)\tilde{u}(s)ds]\,dt.$$

$$= -\int_0^\tau \tilde{x}^T(t)[PA + A^T P]\tilde{x}(t)dt - 2\int_0^t \tilde{x}^T(t)P[\int_0^t F(t-s)\tilde{x}(s)ds]dt$$

$$-2\int_0^\tau \tilde{x}^T(t)PB[\int_0^t G(t-s)\tilde{u}(s)ds]dt$$

$$= \int_0^\tau \tilde{x}^T(t)[Q - PBR^{-1}B^T P]\tilde{x}(t)dt - 2\int_0^\tau \tilde{x}^T(t)P[\int_0^t F(t-s)\tilde{x}(s)ds]dt$$

$$+ 2\int_0^\tau \tilde{u}^T(t)R[\int_0^t G(t-s)\tilde{u}(s)ds]dt$$

(上式中利用了$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^T P\tilde{x}(t)$)

$$= \frac{1}{2\pi}\{\int_0^\tau \tilde{X}_\tau^H(j\omega)[Q - PBR^{-1}B^T p]\tilde{X}_\tau(j\omega)]d\omega$$

$$+ \int_0^\tau \tilde{X}_\tau^H(j\omega)[PF_f(j\omega) + F_f^H(j\omega)P]\tilde{X}_\tau(j\omega)d\omega$$

$$+ \int_0^\tau \tilde{U}_\tau^H(j\omega)[RG_f(j\omega) + G_f^H(j\omega)R]\tilde{U}_\tau(j\omega)d\omega\}$$

(上面等式是由 Parsevall 定理得来的)

$$= \frac{1}{2\pi}\{\int_0^\tau[\tilde{X}_\tau^H(j\omega)(1-\alpha)Q\tilde{X}_\tau(j\omega) + \tilde{U}_\tau^H(j\omega)\beta R\tilde{U}_\tau(j\omega)]d\omega$$

$$+ \int_0^\tau \tilde{X}_\tau^H(j\omega)[\alpha Q - PF_f(j\omega) - F_f^H(j\omega)P]\tilde{X}_\tau(j\omega)d\omega$$

$$+ \int_0^\tau \tilde{U}_\tau^H(j\omega)[RG_f(j\omega) + G_f^H(j\omega)R - (1+\beta)R]\tilde{U}_\tau(j\omega)d\omega\}$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^\tau\{\tilde{X}_\tau^H(j\omega)[(1-\alpha)Q]\tilde{X}_\tau(j\omega) + \tilde{U}_\tau^H(j\omega)\beta R\tilde{U}_\tau(j\omega)\}d\omega$$

(上式中利用了(16)(17))

$$= \int_\tau^T[\tilde{x}_\tau^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}_\tau(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt$$

$$= \int_0^\tau[\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt.$$

令　$\tau\to\infty$ 得

$$J(x^*, u^*) \geqslant \int_0^\infty[\tilde{x}^T(t)(1-\alpha)Q\tilde{x}(t) + \tilde{u}^T(t)\beta R\tilde{u}(t)]dt.$$

于是 (i) 得证．如同定理 1 可得 (ii) 的证明．

下面我们来考虑扰动系统 $\left(\widetilde{\sum}_1\right)\left(\widetilde{\sum}_2\right)$ 的灵敏度问题．在这里我们仅考虑 $3\left(\widetilde{\sum}_1\right)$，对于 $\left(\widetilde{\sum}_2\right)$ 可作类似的处理．

为了问题的简化，不妨将之改换成如下形式：

$$\left(\widetilde{\sum}_1'\right)\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + J\tilde{x}(t) + BG\tilde{u}(t), & (7')\\ \tilde{u}(t) = -R^{-1}B^TP\tilde{x}(t). & (8')\end{cases}$$

这里 J、G 为适当维数的矩阵．那么我们有

定理 3 如果扰动矩阵 J，G 满足 $\alpha > 1$，$0 < \beta < 1$：

$$PJ + J^TP \geqslant \alpha Q, \tag{19}$$

$$RG + G^TR \leqslant \frac{1+\beta}{2}R, \tag{20}$$

且 (A, B) 能稳，$Q > 0$（即 Q 正定），那么 $\left(\widetilde{\sum}_1'\right)$ 不是渐近稳定的．

对于 (18)(20)，就是说系统的扰动相对较大，而反馈回路的扰动项相对较小．

证 令 $\tilde{A} = A + J - BGR^{-1}B^TP$，

则
$$P\tilde{A} = PA + PJ - PBGR^{-1}B^TP$$
$$= PA + PJ - PBR^{-1}RGR^{-1}B^TP,$$
$$\tilde{A}^TP = A^TP + J^TP - PBR^{-1}G^TB^TP$$
$$= A^TP + J^TP = PBR^{-1}G^TRR^{-1}B^TP.$$

于是

$$\begin{aligned}P\tilde{A} + \tilde{A}^TP &= (PA + A^TP) + (PJ + J^TP)\\ &\quad + [PBR^{-1}RGR^{-1}B^TP + PBR^{-1}G^TRR^{-1}B^TP].\\ &= (PBR^{-1}B^TP - Q) + (PJ + J^TP)\\ &\quad - [PBR^{-1}RGR^{-1}B^TP + PBR^{-1}G^TRR^{-1}B^TP]\\ &= (PJ + J^T - Q) + PBR^{-1}[R - RG - G^TR]R^{-1}B^TP\\ &\geqslant (\alpha - 1)Q + PBR^{-1}\left[\frac{(1-\beta)}{2}R\right]R^{-1}B^TP.\end{aligned}$$

上式中利用了 (19)(20)．于是

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^TP \geqslant (\alpha - 1)Q.$$

设 λ 为 $\tilde{A}$ 的任一特征值，那么其特征向量设为 x，即 $\tilde{A}x = \lambda x$，则

$$0 < x^T(\alpha - 1)Qx \leqslant x^T(P\tilde{A} + \tilde{A}^TP)x$$
$$= x^TP\tilde{A}x + x^T\tilde{A}^TPx$$

$$= x^T P\lambda x + \lambda x^T P x$$
$$= 2\lambda x^T P x.$$

由于 $P \geqslant 0$，故
$$x^T P x \geqslant 0.$$
从而
$$\lambda > 0.$$

这就是说$\tilde{A}$ 的任意特征值都为正，因而$\left(\tilde{\sum}_1'\right)$不是渐近稳定的．

在有了定理 3 后，我们可以对$\left(\tilde{\sum}_1'\right)\left(\tilde{\sum}_2'\right)$描述的系统考虑其结果．限于篇幅，本文不再赘述．

而由定理 1、2 与定理 3，我们看到系统的鲁棒性由定理 1、2 描述，而灵敏度由定理 1、2 与定理 3 共同描述，并且是由一对参数 α、β 来描述的．当参数 $0<\alpha<1$，$\beta>0$ 时描述鲁棒性，而参数 $\alpha>1$，$0<\beta<1$ 时描述灵敏性．

注 ①　设 (S) 表示系统$\dot{x}(t)=(Jx)(t), J0=0$，这里 J 为线性或非线性算子．对于算子 H，称〔H，S〕为可检测的，如果对满足 (S) 的非均方可积函数 x:$[0, \infty) \to R^n$，Hx 也是非均方可积的．

注 ②　我们说映射时间函数成时间函数的算子为无记忆的，如果映象在时刻 t_0 的值仅仅依赖于 t_0 和原象在 t_0 的值．

注 ③　(i)　对于定义于 $[0, \infty)$ 上的函数 $x(t)$，对 $\tau>0$，其截断函数 $x_\tau(t)$ 定义为

$$x_\tau(t) = \begin{cases} x(t) & t \in [0, \tau], \\ 0 & t \in (\tau, \infty). \end{cases}$$

(ii)　函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换及其逆变换定义为

$$F(j\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad t>0.$$

要求上面第一个积分有意义(绝对可积下).

(iii) Parsevall 定理：如果$f_1(t)$，$f_2(t)$是可以进行 Fourier 变换的且它们的频谱特性分别是 $F_1(j\omega)$，$F_2(j\omega)$，而积分 $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega)d\omega$，$\int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega)d\omega$ 绝对收敛，那么

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega.$$

我们所使用的是向量值函数情形．$F_f^H(j\omega)$ 表示 $F_f(j\omega)$ 的共轭，即 $F_f(j\omega)$ 的复对偶，也就是将 $F_f^T(j\omega)$ 的每一元素换成共轭复数后的矩阵．

致谢　本文在李文清教授指导下完成，在此表示衷心感谢．

参考文献

〔1〕 Safonov, M. G., Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems, The MIT Press Cambridge Massachusetts and London England, (1980).
〔2〕 Kalman, R. E., When is a Linear System Optimal Trans. Asme (J. Basic. Eng) **86**, 5, (1964), 51–60.
〔3〕 Anderson B.D.O. and J.B.Moore, Linear Optimal Control, Englewood Cliffs Prentice Hall, (1971).
〔4〕 Safonov, M.G. and M. Athans, Gain and Phase Margin Multiloop LQG Regulators, IEEE Trans. Aut. Control, **22**,2,(1977).
〔5〕 DA–ZHONG ZHENG, Optimization of Linear–quadratic Regulator System in the Presence of Parametor Perturbations, IEEE Trans. Aut. Control, **31**, 7,(1986).
〔6〕 Katayama, T. and S. Sasakc, Robust Stability of Linear Quadratic State Feedback Regulator Under System Uncertainty, Int.J.Control, **45**, 2,(1987).
〔7〕 Kwakernaak H. and K. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley and Interscience, New York, (1972).
〔8〕 Desoer, C.A. and M. Vidyasagar, Feedback Systems: Input–output Properties, Academic, New York, (1975).

Robustness and Sensitivity of Linear Quadratic State Feedback Regulator with Perturbation

Pan Shengqiang
(Department of Computer and System Science, Xiamen University)

Abstract: In this paper, the results of Robustness and sensitivity to two kinds of perturbations of linear system are obtained by use of linear quadratic state feedback regulator.

Key words: robustness; sensitity; linear quadratic state feedback regulator