

# 线性最优附加励磁控制系统的优化设计

陈干平 秦翼鸿

(重庆大学电气工程系)

**摘要** 本文将线性最优控制理论、灵敏度分析及线性规划有机地结合起来,圆满地解决了线性最优控制设计中权矩阵的优化选取问题。同时还指出,权矩阵的优化选取,不仅能够改善控制系统的动态品质,而且可以简化控制系统的结构,这是对权矩阵物理意义的一种全新的认识,为发挥权矩阵在线性最优控制中的作用提供了又一途径。文中还用该方法设计了一降阶反馈附加励磁控制系统,收到良好效果。

**关键词:** 电力系统低频振荡; 线性最优控制; 权矩阵; 灵敏度分析; 线性规划

## 1. 前 言

理论研究及实验已经证明,线性最优控制对抑制大型远距离输电系统的低频振荡是十分有效的<sup>[1-4]</sup>。但是在实际的电力系统中,线性最优附加励磁控制的应用却寥寥无几,最大的问题就是如何得到一个物理上易于实现(主要受状态的量测和反馈增益顶值的限制)又有优良品质的线性最优控制系统。权矩阵是整个线性最优控制系统设计过程中唯一可变因素,选择合适的权矩阵成为我们解决这一问题的可能途径。现有的权矩阵选择法在满足反馈增益限制的同时,难以满足优良的动态品质的要求,只能建立一优化模型来对权矩阵进行优化选取。本文将线性最优控制原理、灵敏度分析及线性规划巧妙地结合起来,通过迭代自动搜寻给定约束下的最优权矩阵。以闭环系统特征根对权矩阵的灵敏度为基础,建立一个优化数学模型,采用单纯形方法来搜寻最优解。在搜寻过程中,考虑了反馈增益顶值的约束,解决了反馈增益限制与动态品质优良配合的问题。同时利用本方法,还可以设计降阶反馈控制系统。经过实例计算表明,这种方法非常简便,是进行线性最优控制优化设计的一种有效方法。

## 2. 灵敏度分析

一个控制系统,如何来描述其动态品质对本文的方法是重要的,因为我们不只要有对动态品质的定性描述,而且要有一个定量的描述,才能根据这个定量描述进行优化设计。众所周知,闭环系统特征根决定了闭环系统的稳定性,其主导特征根决定了闭环系统的动态品质,因此在本文中我们选择闭环系统的主导特征根作为控制系统动态品质的定量描述。在优化过程中,进行优化权矩阵的搜索,使闭环系统主导特征根移到左半复平面预定的位置。

优化过程是建立在闭环系统主导特征根对权矩阵灵敏度之上的。文献(5)导出了闭环系统特征根对权矩阵的灵敏度计算公式,现简要说明如下。

由 Riccati 矩阵代数方程可以求得 P 矩阵对 Q 矩阵的灵敏度  $S_{q_{ii}}^p$ 。在 Riccati 方程中

对  $q_m$  求导并整理可得

$$(A - BR^{-1}B^T P)^T S_{q_m}^P + S_{q_m}^P (A - BR^{-1}B^T P) + \text{diag}(0 \ 0 \cdots 1 \cdots 0 \ 0) = 0. \quad (1)$$

↑  
第  $m$  个对角元

可以看出方程 (1) 是关于  $S_{q_m}^P$  的李雅普诺夫方程, 从中选出  $\frac{n(n+1)}{2}$  个独立方程解即

得  $S_{q_m}^P$  ( $m = 1, 2, \dots, n, n$  是系统的维数).

闭环系统矩阵 ( $A' = A - BR^{-1}B^T P$ ) 的特征根  $\Lambda$  受  $P$  矩阵的影响, 具有灵敏度  $S_p^{\lambda_l}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), 其元素  $\frac{\partial \lambda_l}{\partial p_{ij}}$  有公式

$$\frac{\partial \lambda_l}{\partial p_{ij}} = \frac{Z_l^T \left[ \left( \frac{\partial A'}{\partial p_{ij}} \right) V_l \right]}{Z_l^T V_l}, \quad (2)$$

其中  $Z_l, V_l$  是矩阵  $(A')^T, A'$  对应于特征根  $\lambda_l$  的特征向量.

综上所述利用复合函数求导法则, 可以容易地得到特征根  $\lambda_l$  对权矩阵元素  $q_m$  的灵敏度

$$s_{q_m}^{\lambda_l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n EL_{ij} \left( S_p^{\lambda_l} \right) \cdot EL_{ij} \left( S_{q_m}^P \right), \quad (3)$$

其中  $EL_{ij}(X)$  表示矩阵  $X$  的元素  $x_{ij}$ .

从而  $\Lambda$  对  $Q$  的灵敏度可用矩阵形式描述为

$$S_Q^\Lambda = \begin{bmatrix} s_{q_1}^{\lambda_1} & s_{q_2}^{\lambda_1} & \cdots & s_{q_n}^{\lambda_1} \\ s_{q_1}^{\lambda_2} & s_{q_2}^{\lambda_2} & \cdots & s_{q_n}^{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{q_1}^{\lambda_n} & s_{q_2}^{\lambda_n} & \cdots & s_{q_n}^{\lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

在优化过程中必须考虑反馈增益顶值的限制, 因此反馈增益  $K$  对  $q_m$  的灵敏度  $S_{q_m}^K$  也是必须的. 事实上有如下关系:

$$S_{q_m}^K = -R^{-1}B^T S_{q_m}^P, \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

### 3. 优化模型的建立

由于控制系统的动态品质主要决定于主导特征根的实部, 因此本文的优化及约束的考虑均是对实部而言的. 如果要考虑虚部的影响, 在模型中很容易修正得到.

不失一般性, 假设  $\lambda_1$  为闭环系统主导特征根的实部. 我们优化的目的是使  $\lambda_1$  尽可能左移, 直至满足实际的要求为止. 因此将  $\lambda_1$  每次的左移量  $\Delta \lambda_1$  作为优化模型的目标函数:

$$\min \Delta\lambda_1 = \frac{\partial\lambda_1}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial\lambda_1}{\partial q_2} \Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial\lambda_1}{\partial q_n} \Delta q_n. \quad (6)$$

对于非主导特征根, 有可能在优化过程中主导特征根左移的同时出现右移问题, 如果不对此加以限制, 常常使优化过程出现事倍功半的结果. 假设其右移量不大于  $\Delta\lambda_i^0$ , 则可得下列约束条件:

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial q_2} \Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial\lambda_i}{\partial q_n} \Delta q_n \leq \Delta\lambda_i^0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (7)$$

如果我们不仅仅是防止非主导特征根的右移, 而是希望非主导特征根处于预定的位置 ( $\lambda_i^0 \leq \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i^0$ ), 则约束式 (7) 修正为

$$\lambda_i^0 \leq \lambda_i + \frac{\partial\lambda_i}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial q_2} \Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial\lambda_i}{\partial q_n} \Delta q_n \leq \bar{\lambda}_i^0, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (7')$$

一般权矩阵的选择方法最大的不足之处在于不能考虑反馈增益  $K$  的约束, 这常常导致在使主导特征根  $\lambda_1$  左移的同时出现巨大的反馈增益, 出现了物理实现上的困难. 利用 (5) 式求出的灵敏度  $S_{q_n}^K$  可以很容易地考虑反馈增益  $K$  的约束, 如果  $K$  的上、下限为  $\bar{K}^0$ 、 $\underline{K}^0$ , 则有约束

$$\underline{K}_{ij}^0 \leq K_{ij} + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_2} \Delta q_2 + \cdots + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_n} \Delta q_n \leq \bar{K}_{ij}^0, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

对于线性最优控制系统而言, 权矩阵具有一定的物理意义, 它表示对状态变量的约束,  $q_i$  越大表示对第  $i$  个状态变量约束越强, 相应的动态品质就好一些<sup>[6]</sup>. 因此尽管  $q_i$  的增大对其它状态变量而言起到恶化其动态品质的作用, 然而为了保证第  $i$  个状态变量的动态品质, 仍要求  $q_i$  不小于某一值  $\bar{q}_i^0$ . 因此在优化模型中需对权矩阵的变化范围作一限制:

$$q_i^0 \leq q_i + \Delta q_i \leq \bar{q}_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

显而易见, 闭环系统特征根  $\Lambda$  与权矩阵  $Q$  之间的关系是非线性关系, 然而在我们的优化模型中却是采用的线性模型. 为了保证非线性问题用线性规划来寻优时的适用范围, 必须对优化步长  $\Delta q_i$  有一限制:

$$\Delta q_i \leq \Delta q_i^0. \quad (10)$$

作者曾就  $\Lambda$  与  $Q$  的关系作过粗略的探讨, 在文献 [7] 中指出,  $\Lambda$  与  $Q$  的关系是平滑而单调的. 这就是说,  $\Delta q_i^0$  的选取不必过小, 否则使优化过程太长.

上面的优化模型有一个致命的弱点, 就是在优化过程中, 权矩阵只能是递增的, 这是由于在单纯形法中还存在有一个隐含约束  $\Delta q_i \geq 0$ . 这显然降低了优化效率, 而且也不切合实际. 只要在优化过程中  $Q$  矩阵满足半正定条件都应该是合理的. 因此为了在优化过程中  $Q$

矩阵可增可减, 作代换

$$\Delta q_i = \Delta q_i' - \Delta q_i'', \quad (\Delta q_i', \Delta q_i'' \geq 0).$$

将上关系代入目标函数及约束条件, 以  $\Delta q_i', \Delta q_i''$  为寻优变量, 就可以解决这一问题.

综合(6)~(10)式可得如下优化模型:

$$\begin{aligned} \min \Delta \lambda_1 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_1} (\Delta q_1' - \Delta q_1'') + \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} (\Delta q_2' - \Delta q_2'') + \cdots + \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_n} (\Delta q_n' - \Delta q_n''), \\ \left. \begin{aligned} \lambda_i^0 &\leq \lambda_i + \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_1} (\Delta q_1' - \Delta q_1'') + \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_2} (\Delta q_2' - \Delta q_2'') + \cdots + \frac{\partial \lambda_1}{\partial q_n} (\Delta q_n' - \Delta q_n'') \leq \bar{\lambda}_i^0, \\ K_{ij}^0 &\leq K_{ij} + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_1} (\Delta q_1' - \Delta q_1'') + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_2} (\Delta q_2' - \Delta q_2'') + \cdots + \frac{\partial K_{ij}}{\partial q_n} (\Delta q_n' - \Delta q_n'') \leq \bar{K}_{ij}^0, \\ q_i^0 &\leq q_i + (\Delta q_i' - \Delta q_i'') \leq \bar{q}_i^0, \\ \Delta q_i^0 &\leq \Delta q_i' - \Delta q_i'' \leq \bar{\Delta q}_i^0, \\ \Delta q_i', \Delta q_i'' &\geq 0. \end{aligned} \right\} \text{st} \end{aligned} \quad (11)$$

下面给出一优化例子. 设有如下线性系统:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.196 & 1.0 & -1.39 & -0.003 \\ -50.9 & 20.0 & 87.0 & -2.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ -2.94 & 0.0 & -22.6 & -0.008 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} u. \quad (12)$$

我们在两种情况下分别寻优, 一种是考虑反馈增益顶值的约束, 一种是不考虑反馈增益顶值的约束. 两种情况下均要求主导特征根实部  $\text{Re}(\lambda_1) \leq -2.3$ .

1° 考虑反馈增益顶值约束, 优化结果如下:

$$\bar{K}^0 = -K^0 = [200 \ 200 \ 500 \ 300],$$

$$Q_{\text{opt}} = \text{diag}(1.75502 \times 10^3 \ 0 \ 1 \times 10^6 \ 1.54138 \times 10^4),$$

$$K = [-1.5271 \times 10^2 \ -6.5599 \ -5 \times 10^2 \ 2.2876 \times 10^2],$$

$$\Lambda = \{-2.3847 \pm j 5.7281, -5.2777, -16.7168\}.$$

2° 不考虑反馈增益顶值约束, 优化结果如下:

$$Q_{\text{opt}} = \text{diag}(0 \ 0 \ 1.35 \times 10^5 \ 2.7 \times 10^4),$$

$$K = [-1.0466 \times 10^2 \ -4.6847 \ -6.8076 \times 10^2 \ 1.2839 \times 10^2],$$

$$\Lambda = \{-2.40815 \pm j 5.275, -3.1202, -16.9521\}.$$

从上面的结果可以看出, 反馈增益约束对权矩阵有很大的影响. 这也给我们一种启示, 如果要求反馈增益  $K^0 \leq K \leq \bar{K}^0$ , 而主导特征根尽可能左移, 这在其它权矩阵选择法中很难实现. 然而对于本文的寻优方法却是非常容易的.

#### 4. 降阶反馈附加励磁控制系统的设计及仿真

在一单机无穷大电力系统<sup>[5]</sup>，当没有控制时，同步机的最大功角仅为  $72.93^\circ$ ，最大输送容量只有  $0.895\text{pu}$ ，显然这是由于系统阻尼不足而引起低频振荡导致系统失稳所致。因此为了提高系统的传输功率，抑制低频振荡，必须采用附加励磁控制。选择功角  $\delta$ 、角速度  $\omega$ 、暂态电势  $E'_q$ 、励磁电势  $E_f$  作为状态变量，在运行点  $P_e = 0.8\text{pu}$  下得到四阶线性化状态方程：

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta} \\ \Delta \dot{\omega} \\ \Delta \dot{E}'_q \\ \Delta \dot{E}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 314.159 & 0.0 & 0.0 \\ -0.1857 & -0.5426 & -0.2129 & 0.0 \\ -0.2987 & 0.0 & -0.5024 & 0.1767 \\ -5.7619 & 0.0 & -2472.831 & -50.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \omega \\ \Delta E'_q \\ \Delta E_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 5000.0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.1809 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \Delta P_m, \quad (13)$$

$$\Delta P_e = 1.027\Delta\delta + 1.17699\Delta E'_q, \quad (14)$$

其中  $\Delta P_m$  是输入机械功率， $\Delta P_e$  是输送电磁功率。

很容易得出，状态方程 (13) 的开环主导特征根为  $-0.3486 \pm j7.5285$ ，希望加入控制后系统的阻尼系数有较大的改善。但是对于一个实际系统，应该考虑其物理实现的可能性，做到尽可能的简单、方便。在实现中首先遇到的问题就是状态变量的测量，其次是反馈增益顶值的限制。对于 (13) 式所对应的四个状态变量来说，比较难测量的状态是同步机的功角偏差  $\Delta\delta$ 。一般解决办法有两种：一是用其它易测变量代替，但这常常导致系统动态性能下降；二是采用状态观测器，但这不仅使控制系统设计变得复杂而且实现也极为困难。如果在设计控制系统时能使状态  $\Delta\delta$  所对应的反馈增益为零，那么就没有必要测量状态  $\Delta\delta$ ，从而避免功角偏差  $\Delta\delta$  量测上的困难。我们的研究表明，通过选择权矩阵是可以达到这一目的的，用本文的方法极易实现。事实上在优化模型 (11) 中，对状态  $\Delta\delta$  所对应的反馈增益约束严格控制，使之上下限恒为零，并对矩阵自动寻优，就可以得到一组既能使  $\Delta\delta$  所对应的反馈增益为零，又能使系统的主导特征根最好的权矩阵  $Q_{\text{opt}}$ 。

对于 (13) 式的待控系统，可以得到下列优化结果：

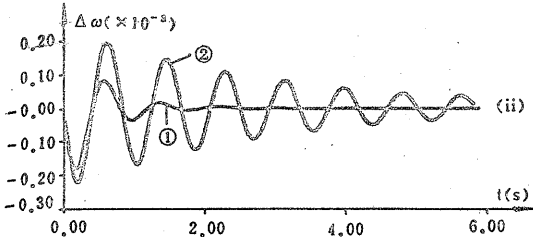
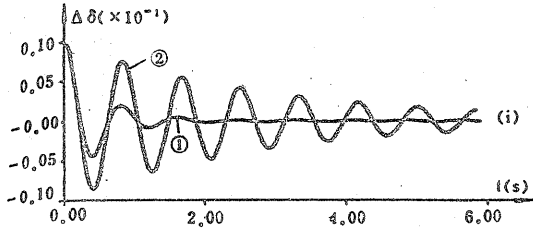
$$Q_{\text{opt}} = \text{diag}(1.65245 \times 10^1 \quad 2.7195 \times 10^1 \quad 6.625 \times 10^1 \quad 4.08652 \times 10^{-3}),$$

$$K = (0 \quad 1.44474 \times 10^2 \quad -8.8358 \quad -5.93611 \times 10^{-2}),$$

$$\Lambda = \{-2.0031 \pm j7.94056, -22.4621, -321.382\}.$$

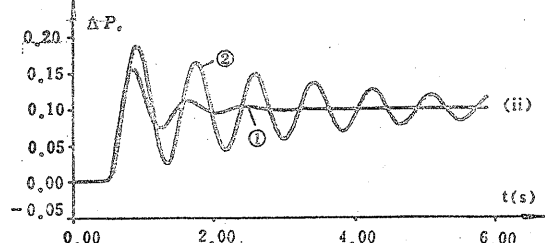
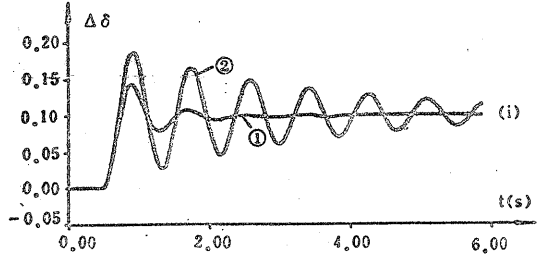
闭环系统的动态品质只有用动态行为曲线才能直观地描述出来，对于本文所提出的控制系统，为检验其控制效果，我们进行了小干扰试验。图 1 是冲击响应曲线，是假设  $\Delta\delta$  受到

0.01pu 的冲击扰动下得到的。图 2 是阶跃响应曲线，是假设同步机输入机械功率  $\Delta P_m$  增加 0.1pu 阶跃输入而得到的。从动态响应曲线可以看出，其控制效果是十分显著的。



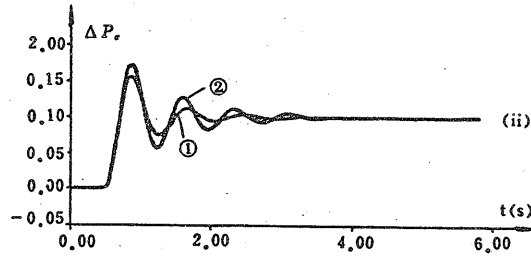
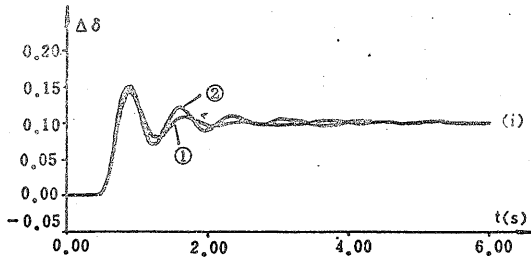
①闭环系统； ②开环系统

图 1 冲击响应试验曲线



①闭环系统； ②开环系统

图 2 阶跃响应试验曲线



①优化设计方法； ②降阶模型设计方法

图 3 两种降阶反馈控制系统性能比较

必须指出，在本方法中，尽管我们得到的反馈增益是降阶的，这并不意味着损失了某一状态变量所包含的有效信息。我们之所以能得到降阶反馈增益阵，完全是由于权矩阵各元素相互匹配所致，没有任何人为的近似。在设计过程中采用的是全状态方程，这又区别于高阶模型设计方法，信息利用率较后者为高。可以这样认为，状态  $\Delta \delta$  所代表的信息经过权矩阵各元素之间的匹配传递给其它状态变量而表现出来，因此用本优化方法得到的降阶反馈控制尽管属于次最优控制的范围，但其次最优性较一般方法更接近最优性。图 3 是本控制系统与高阶模型设计方法所得控制系统动态品质优于降阶模型设计方法所得控制系统的动态品质。

## 5. 结 论

总结以上工作, 可得下面几点结论:

- (1) 对权矩阵的优化选择是必要的, 采用线性规划原理既简单又切实可行.
- (2) 为物理实现的可行性, 在优化过程中应对反馈增益顶值给予限制. 同时, 用本文的优化方法可以在给定反馈增益范围的前提下, 反过来寻求动态品质最优的权矩阵.
- (3) 权矩阵的优化选择, 不仅可以改善控制效果, 而且可以简化控制系统的结构, 构成降阶反馈控制系统.

## 参 考 文 献

- (1) De Mello, F. P., Concordia, C., Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control, IEEE Trans. Power Appar Syst., 88, 4, (1969), 316—329.
- (2) Yaonan, Yu, Siggers, F., Stabilization and Optimal Control Signals for a Power System, IEEE Summer Meeting and EHV Conference, Paper 70 TP 531—PWR, (1970).
- (3) Yaonan, Yu, Electric Power System Dynamics, Academic Press, London, (1983), 94—135.
- (4) Elmetwally, M. M., Dharma Rao, N., Sensitivity analysis in Power System Dynamic Stability Studies, IEEE PES Winter Meeting, Paper T 72 144—9, (1972).
- (5) 陈干平、秦翼鸿, 一种线性最优控制权矩阵灵敏度选取法, 重庆大学学报, 11, 3, (1988), 67—73.
- (6) 卢强、王仲鸿、韩英铎, 输电系统最优控制, 清华大学出版社, 北京, (1984), 158—183.
- (7) 陈干平、秦翼鸿, 电力系统低频振荡最优控制研究, 电力系统运行与控制学术会议论文集, (1987), 162—169.
- (8) 李维铮、郭耀煌等, 运筹学, 清华大学出版社, 北京, (1985), 1—81.

## An Optimizing Design Technique for Linear Optimal Supplementary Excitation Control System

Chen Ganping, Qin Yihong

(Department of Electrical Engineering, Chongqing University)

**Abstract:** This paper ingeniously combines linear optimal control theory, sensitivity analysis and linear program to overcome the difficulty of choosing optimal weighting matrices. It is pointed out that the optimal choice of weighting matrices not only improves the control system dynamic qualities but also simplifies the structure of control system. This is a completely new knowledge of the physical meaning of weighting matrices, and also gives another way to make good use of weighting matrices in linear optimal control strategies. As a practical example, an optimal supplementary excitation control system is designed by the proposed method and satisfactory results were reached.

**Key words:** power system low frequency oscillations; linear optimal control; weighting matrix; sensitivity analysis; linear programming