

用改进模型算法控制控制无自平衡系统

李嗣福

(中国科学技术大学自动化系, 合肥)

摘要 本文在〔1、2〕给出的改进模型算法控制的基础上, 提出用系统的单位方波响应离散化序列描述含积分作用的无自平衡系统的状态空间表达式, 使得模型算法控制借助这种描述可以控制含1阶和2阶以至更高阶积分作用无自平衡系统. 而且在线计算量小、系统性能良好.

关键词: MAC、DMC、MPC、线性系统; 无自平衡系统控制.

1. 引言

传统模型算法控制 (MAC) 和动态矩阵控制 (DMC) 都不能直接控制含积分作用无自平衡系统. 最近〔3〕提出了可以控制含一阶积分无自平衡系统的推广 DMC 算法, 但算法较复杂, 使用有些不便. 〔1、2〕提出的改进 MAC 将传统 MAC 计算系统预测输出的方程改为迭代的状态空间形式, 从而使 MAC 在线计算大大减少, 而且可以用现代控制理论中的观测器、卡尔曼滤波技术进一步改善系统的性能. 但是这种改进 MAC 仍不能直接控制含积分无自平衡系统. 本文在〔1、2〕的基础上, 给出可以直接控制含一阶、二阶以及更高阶积分的无自平衡系统的改进 MAC 算法, 比推广 DMC〔3〕计算量小, 且系统性能亦有所改善.

2. 控制无自平衡系统的改进 MAC 算法

改进 MAC〔1,2〕采用的两种描述离散化系统的状态空间表达式虽仅适用稳定系统, 但稍作改变便可描述含积分无自平衡离散化系统. 对于含一阶积分无自平衡系统有如下定理.

定理 任一线性时不变的含一阶积分的无自平衡离散化系统, 若其原连续系统的单位方波响应的稳态值为一有界常数, 则如下状态空间表达式成立.

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma u(k), \quad (1)$$

$$y(k) = HX(k), \quad (2)$$

$$Y_p(k) = H_p X(k), \quad (3)$$

式中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}_{N \times 1}$$

$u(k)$ 、 $y(k)$ 分别是系统第 k 步的控制量和输出量； $Y_p(k) = [y_p(k+1), y_p(k+2), \dots, y_p(k+p)]^T$ ， $y_p(k+i)$ ， $i=1, 2, \dots, p$ 为系统第 k 步的未来各步预测输出； $X(k) = [x_1(k), \dots, x_N(k)]^T$ 为系统状态向量； h_1, h_2, \dots, h_N 是原连续系统的单位方波响应离散化序列前 N 项，对于 N 有 $h_{N+i} \simeq h_N$ ， $i \geq 1$ 的整数； $H = [1, 0, \dots, 0]_{1 \times N}$ ， $H_p = [O_{p \times 1} \mid I_p \mid O_{p \times (N-p-1)}]_{p \times N}$ 。

证 按照线性系统的线性叠加原理，系统输出 $y(k)$ 可表示为离散折积

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i u(k-i). \tag{4}$$

因 $h_{N+i} \simeq h_N$ ， $i \geq 1$ ，在工程允许误差内，可令 $h_{N+i} = h_N$ ， $i \geq 1$ ；对于物理系统， $u(i) = 0$ ， $i < 0$ ； $h_0 = 0$ 。因此上式可改写为

$$y(k) = \sum_{i=1}^N h_i u(k-i) + h_N \sum_{i=N+1}^k u(k-i). \tag{5}$$

同理， $y(k+j) = \sum_{i=1}^N h_i u(k+j-i) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+j} u(k+j-i)$ ， $j=0, 1, \dots, N-1$ 。 $\tag{6}$

当系统处于第 $k-1$ 步时，控制 $u(k+i)$ ， $i=0, 1, \dots, N-1$ ，均未作用于系统，所以 $u(k+i) = 0$ ， $i=0, 1, \dots, N-1$ 。因此系统在第 $k-1$ 步时的未来 $(N+1)$ 步输出 $y(k+i)|_{k-1}$ ， $i=0, 1, \dots, N$ ，由 (6) 式可得

$$\left\{ \begin{array}{l} y(k)|_{k-1} = h_1 u(k-1) + \dots + h_N u(k-N) + h_N \sum_{i=N+1}^k u(k-i), \\ y(k+1)|_{k-1} = h_2 u(k-1) + \dots + h_N u(k+1-N) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+1} u(k+1-i), \\ \dots \\ y(k+N-1)|_{k-1} = h_N u(k-1) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+N-1} u(k+N-1-i) \\ y(k+N)|_{k-1} = h_N \sum_{i=N+1}^{k+N} u(k+N-i) = h_N u(k-1) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+N-1} u(k+N-1-i). \end{array} \right.$$

当系统处于第 k 步时的未来 N 步输出 $y(k+i)|_k$ ， $i=1, \dots, N$ ，考虑 $u(k)$ 已作用于系统，

由 (6) 得

$$\begin{aligned} y(k+1)|_k &= h_1 u(k) + \dots + h_N u(k+1-N) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+1} u(k+1-i) \\ &= h_1 u(k) + y(k+1)|_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(k+N-1)|_k &= h_{N-1}u(k) + h_N u(k-1) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+N-1} u(k+N-1-i) \\
 &= h_{N-1}u(k) + y(k+N-1)|_{k-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(k+N)|_k &= h_N u(k) + h_N u(k-1) + h_N \sum_{i=N+1}^{k+N-1} u(k+N-1-i) \\
 &= h_N u(k) + y(k+N-1)|_{k-1}.
 \end{aligned}$$

定义 $x_{1+i}(k) = y(k+i)|_{k-1}$, 相应地 $x_{1+i}(k+1) = y(k+1+i)|_k$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, 分别为系统第 k 和第 $k+1$ 步状态变量, 代入上式得

$$\begin{cases}
 x_1(k+1) = y(k+1)|_k = h_1 u(k) + x_2(k), \\
 x_2(k+1) = y(k+2)|_k = h_2 u(k) + x_3(k), \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{n-1}(k+1) = y(k+n-1)|_k = h_{N-1} u(k) + x_N(k), \\
 x_n(k) = y(k+n)|_k = h_N u(k) + x_N(k).
 \end{cases}$$

写成矩阵形式便得方程 (1), 即

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma u(k).$$

方程(2)、(3)可由状态变量定义直接推得.

推论 任一线性时不变的含 2 阶积分的无自平衡离散化系统, 若其原连续系统的单位方波响应 $h(t)$ 的一阶导数稳态值 $\dot{h}(t)|_{t \rightarrow \infty}$ 是有界常数, 则该系统可用如下状态空间表达式描述,

$$X(k+1) = \Phi X(k) + \Gamma \sum_{i=0}^k u(i), \tag{7}$$

$$y(k) = H X(k), \tag{8}$$

$$Y_p(k) = H_p X(k), \tag{9}$$

式中 $\Gamma = [\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_N]^T_{N \times 1}$, $\bar{h}_i = \Delta h_i / T$, $\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$ 为原连续系统的单位方波响应离散化序列的一阶差分, T 为采样周期; Φ 、 H 、 H_p 、 $X(k)$ 、 $u(k)$ 、 $y(k)$ 、 $Y_p(k)$ 与方程 (1)、(2)、(3) 中的定义相同.

证 设 $G_2(s) = \frac{1}{s} G_1(s)$ 为含 2 阶积分无自平衡系统, 其中 $G_1(s)$ 为含 1 阶积分无自平衡系统. 可证明 $G_2(s)$ 的离散化序列 $\bar{h}_i (i = 1, 2, \dots)$ 和 $G_1(s)$ 的单位方波响应离散化序列 $h_{1i} (i = 1, 2, \dots)$ 相等, 由定理知, $G_1(s)$ 的离散化状态方程为 (1). 因 $G_2(s)$ 是 $G_1(s)$ 和一积分环节串联的, 所以将 $G_1(s)$ 的离散化方程 (1) 中的控制 $u(k)$ 改为控制量累加 $\sum_{i=0}^k u(i)$ (等效连续系统的积分), 将 Γ 中的元素换为 $\bar{h}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 便是系统 $G_2(s)$ 的离散化状态方程 (7). 方程 (8)、(9) 可由状态变量 $x_i(k)$ 定义直接得到.

还可证明, 系统 $G_2(s)$ 的序列 $\Delta h_i (i=1,2,\dots)$ 就是 $G_2(s)$ 的正负单位方波响应的离散化序列如图 1 所示. 因此 $G_2(s)$ 的序列 $\bar{h}_i = \Delta h_i / T (i=1,2,\dots,N)$ 可以通过正负单位方波响应实验获得.

对于含 $n > 2$ 更高阶积分无自平衡系统, 只要除去全部积分余下的子系统是稳定的, 均可用上述状态空间方程描述其离散化系统. 将方程 (1) 中 Γ 阵的元素换为 $\Delta^{n-1} h_i / T^{n-1}$, ($i=1,2,\dots,N$;

$\Delta^{n-1} h_i$ 是系统的单位方波响应序列的 $n-1$ 阶差分), 将 $u(k)$ 换为控制量的 $n-1$ 重累加即可.

用改进 MAC 控制含积分无自平衡系统的算法和控制稳定系统的算法相同. 控制含 1 阶积无自平衡系统算法为

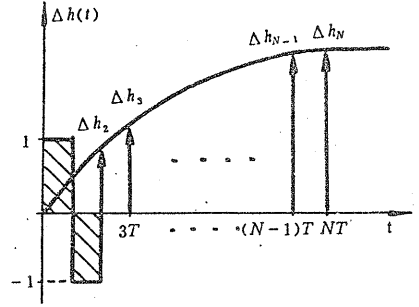


图 1 含 2 阶积分无自平衡系统正负单位方波响应

1) 由其状态空间表达式建立闭环观测器

$$\hat{X}(k+1) = \Phi \hat{X}(k) + \Gamma u(k) + K [y(k) - H \hat{X}(k)], \quad (10)$$

$$\hat{Y}_p(k) = H_p \hat{X}(k), \quad (11)$$

计算未来 p 步预测输出向量 $\hat{Y}_p(k)$; 这里 K 阵可以取 $= k[1, \dots, 1]_{N \times 1}^T$, $0 < k < 1$.

2) 由期望输出轨线方程 $y_p(k+i) = \beta^i y(k) + (1-\beta^i) y_{sp}$, $i=1,2,\dots,p$. (12)

y_{sp} 是系统的设置值.

计算期望输出向量 $Y_p(k) = [y_p(k+1), \dots, y_p(k+p)]^T$.

3) 计算控制量

$$u(k) = A_1^* [Y_p(k) - \hat{Y}_p(k)], \quad (13)$$

A_1^* 是矩阵 $[A_2^T A_2 + qI_m]^{-1} A_2^T$ 的第一行向量, 其中

$$A_2 = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & & & & 0 \\ h_2 & h_1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ h_m & \dots & \dots & h_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ h_p & h_{p-1} & \dots & h_{p-m+1} & \end{bmatrix}_{p \times m}$$

$m < p$ 是待求的控制序列长度.

控制含 2 阶积分无自平衡系统的算法与上面的算法基本相同, 所不同的是, 由系统状态空间表达式 (7)–(9) 建立其相应闭环观测器

$$\hat{X}(k+1) = \Phi \hat{X}(k) + \Gamma \sum_{i=1}^k u(i) + K [y(k) - H \hat{X}(k)], \quad (14)$$

$$\hat{Y}_p(k) = H_p \hat{X}(k). \quad (15)$$

控制量按下式计算

$$\sum_{i=0}^k u(i) = A_1^* [Y_p(k) - \hat{Y}_p(k)], \quad (16)$$

$$u(k) = \sum_{i=0}^k u(i) - \sum_{i=0}^{k-1} u(i). \quad (17)$$

A_1^* 与式 (13) 中的 A_1^* 形式相同, 仅其中 A_2 阵的元素不同, 即

$$A_2 = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & & & & 0 \\ & \bar{h}_2 & & & \bar{h}_1 \\ & \dots & & & \dots \\ & \bar{h}_m & \dots & \dots & \bar{h}_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{h}_p & \bar{h}_{p-1} & \dots & \bar{h}_{p-m+1} & \dots \end{bmatrix}_{p \times m}$$

算法中预测输出向量 $Y_p(k)$ 也可用系统的开环观测器来计算. 对于含 1 阶积分无自平衡系统, 开环观测器为

$$\hat{X}(k+1) = \Phi \hat{X}(k) + \Gamma u(k), \quad (18)$$

$$\hat{Y}_p(k) = H_p \hat{X}(k) + H_i [y(k) - H \hat{X}(k)], \quad (19)$$

$$H_i = [1, 1, \dots, 1]_{p \times 1}^T$$

相应控制量仍由 (13) 式计算, 即

$$u(k) = A_1^* [Y_p(k) - \hat{Y}_p(k)],$$

$$Y_p(k) - \hat{Y}_p(k) = \begin{bmatrix} (1-\beta) \\ (1-\beta^2) \\ \vdots \\ (1-\beta^p) \end{bmatrix} [y_{sp} - y(k)] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} H \hat{X}(k) - H_p \hat{X}(k). \quad (20)$$

用开环观测器的改进 MAC 的控制算法与传统 MAC 以及推广 DMC 的控制算法是相同的, 相应控制系统性能显然不如用闭环观测器的改进 MAC 系统性能好, 采用闭环观测器的改进 MAC 系统对噪声干扰有一定滤波作用 (参见 [1]).

3. 仿真结果

用上述控制无自平衡系统的改进 MAC (用闭环观测器) 对如下含 1 阶和 2 阶积分无自平衡系统

$$G_1(s) = \frac{1}{s(20s+1)}; \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2(20s+1)}$$

分别进行了计算机控制的仿真. 系统 $G_1(s)$ 的单位脉冲响应序列前 $N=20$ 项为 (采样周

2期

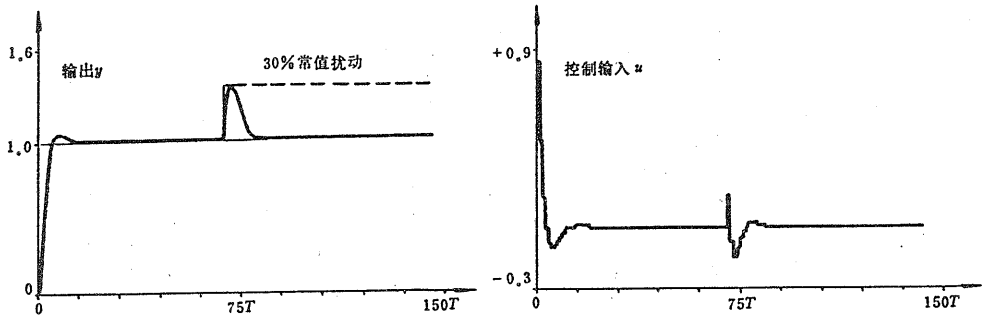
期 $T=5$ 秒)

$h_1 = 0.181, 0.362, 0.503, 0.613, 0.699, 0.765, 0.817, 0.858, 0.889, 0.914, 0.933, 0.948, 0.959, 0.968, 0.975, 0.981, 0.985, 0.988, 0.991, 0.993.$

系统 $G_2(s)$ 的单位脉冲响应序列的一阶差分序列的前 $N=20$ 项为 ($T=5$ 秒, 为仿真计算简便, 这里用脉冲响应代替了实际系统的方波响应)

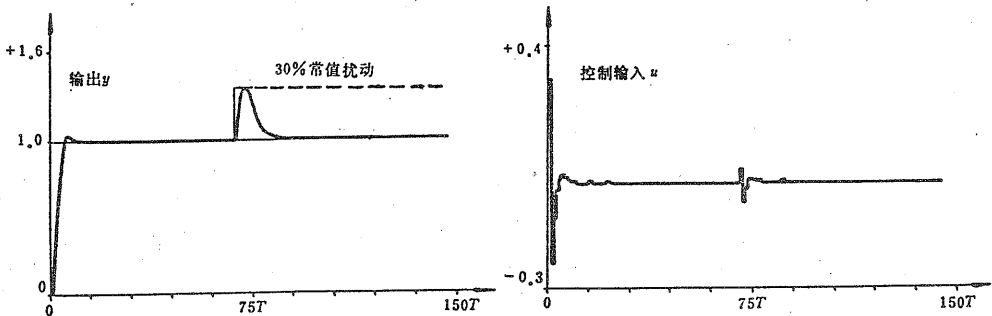
$\Delta h_1 = 0.576, 1.555, 2.317, 2.91, 3.373, 3.733, 4.013, 4.231, 4.401, 4.534, 4.637, 4.717, 4.78, 4.828, 4.866, 4.896, 4.919, 4.937, 4.951, 4.962.$

图 2a 和图 2b 分别为改进 MAC 控制的 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 系统对输入设置值阶跃变化以及输出端出现的 30% 常值扰动的输出响应。由图表明, 改进 MAC 控制的含 1 阶和 2 阶积分无自平衡系统对输入设置值变化都有良好的跟踪能力, 对常值扰动均有很好的调节抑制能力, 并且都无余差。控制系统的动态特性可以按照具体工程要求通过改变参数 β 、 q 和 k (闭环观测器增益) 值进行调整。



$p=6, m=3, \beta=0.5, q=0.2, k=0.4, T=5$ 秒

图 2a 改进 MAC 控制含 1 阶积分无自平衡系统的结果



$p=6, m=3, \beta=0.5, q=0.2, k=0.4, T=5$ 秒

图 2b 改进 MAC 控制含 2 阶积分无自平衡系统的结果

4. 结 语

理论推导和仿真结果表明, 采用前面给出的描述含积分无自平衡离散化系统的状态空间表达式及其相应改进 MAC 控制算法确能有效地控制含 1 阶和 2 阶积分无自平衡系统 (更高阶积分无自平衡系统也可以控制, 但无实际应用意义), 并在计算量和控制系统性能方面均优于推广 DMC。本文仿真结果是刘军同志提供的, 特此感谢。

参 考 文 献

- (1) 李嗣福, 一种改进的模型算法控制, 信息与控制, 17, 1, (1988), 15—20.
- (2) 李嗣福, 模型算法控制的状态空间形式及算法改进, 中国科技大学学报, 17, 4, (1987), 485—494.
- (3) 黄道平等, 动态矩阵控制在非自平衡系统中的应用, 化工自动化及仪表, 15, 2, (1988), 6—12.
- (4) Rouhani, R., Mehra, R. K., Model Algorithmic Control (MAC) Basic Theoretical properties, Automatica, 18, (1982), 401—414.

Application of the Improved Model Algorithmic Control to Controlling Imbalanced Systems

Li Sifu

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract: According to the principle of the Improved Model Algorithmic Control developed in (1,2), a state space expression describing Imbalanced systems with integral action used the system unit pulse response discrete time sequence is presented, The Improved Model Algorithmic Control can be respectively applied to Controlling Imbalanced systems with first order, second order as well as higher order integral action by means of the state space expression. Moreover, the computation amount implementing MAC on-line is reduced significantly and the satisfying system performance can be obtained.

Key words: MAC, DMC, MPC, linear system; Imbalanced system control