第7卷 第3期
1990年9月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 7, No. 3
Sept., 1990

$C[sI-A]^{-1}B$ 传递函数矩阵互素分解的新算法

张 福 恩

(哈尔滨工业大学控制工程系)

摘要 本文通过矩阵的基本列(或行)变换给出了计算矩阵$[sI-A]^{-1}B$,$C[sI-A]^{-1}B$的互素分解矩阵的新算法. 这种算法比已有的简单,实用. 文的最后举例说明了它的应用.

关键词: 多变量控制系统;极点配置;多项式矩阵;多项式矩阵互素分解

1. 引 言

在线性多变量系统理论中,利用传递函数矩阵的互素分解矩阵设计状态反馈、输出反馈、PI、PID调节器是行之有效的方法[1,2,3],这种方法首先遇到的就是计算$[sI-A]^{-1}B$,$C[sI-A]^{-1}$,$C[sI-A]^{-1}B$的互素分解矩阵. 关于有理函数矩阵互素分解矩阵的计算文献[1,4]已作了详细的讨论. 本文则给出了与[1,4]不同的算法,通过矩阵简单的基本列(或行)变换即可得到矩阵的互素分解矩阵. 下面首先讨论算法的理论基础.

2. 基本理论

设能控能观系统方程为

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx, \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$,$u\in R^p$,$y\in R^m$,分别称为状态向量,控制向量和输出向量;A,B,C分别为相应维数的实常数矩阵. 由系统(1)得传递函数矩阵

$$G_1(s)=[sI-A]^{-1}B,\ G_2(s)=C[sI-A]^{-1},\ G(s)=C[sI-A]^{-1}B. \tag{2}$$

2.1 首先讨论$[sI-A]^{-1}B$的右互素分解

设

$$G_1(s)=[sI-A]^{-1}B=N_1(s)D_1^{-1}(s), \tag{3}$$

其中 $N_1(s)$和$D_1(s)$分别为$(n+p)\times p$. $p\times p$维矩阵. 称B,$sI-A$和$N_1(s)$,$D_1(s)$分别为$G_1(s)$的左和右分解. 若复合阵$[B|sI-A]$和$\begin{bmatrix}D_1(s)\\N_1(s)\end{bmatrix}$的smith标准型分别为$[I_n\quad 0]$和$\begin{bmatrix}I_p\\0\end{bmatrix}$,则分别称它们为$G_1(s)$的左和右互素分解. 简称左和右互素的.

引理1 若(A,B)能控,则B,$sI-A$矩阵左互素[4].

引理2 若B,$sI-A$矩阵左互素,则存在有$(n+p)\times(n+p)$么模矩阵$Q(s)$使得

$$[-B\,\vdots\,sI-A]Q(s)=[U_1(s)\quad 0]. \tag{4}$$

证 因为B,$sI-A$矩阵左互素,所以存在有$n\times n$和$(n+p)\times(n+p)$么模矩阵$P(s)$和Q

本文于1988年5月30日收到. 1989年5月2日收到修改稿.

(s)使得

$$P(s)[-B \vdots sI-A]Q(s)=[I_n \quad 0].$$

由于 $P^{-1}(s)$存在，且亦为么模矩阵，因而得

$$[-B \vdots sI-A]Q(s)=[P^{-1}(s) \quad 0]=[U_1(s) \quad 0],$$

其中 $U_1(s)=P^{-1}(s)$，引理 2 得证.

定理 1 若(A,B)能控，则$[sI-A]^{-1}B$的一组右互素分解矩阵 $N_1(s),D_1(s)$由下式确定

$$\begin{bmatrix} D_1(s) \\ N_1(s) \end{bmatrix}=Q_p(s), \tag{5}$$

其中 $Q_p(s)$为么模列变换阵 $Q(s)$的后 p 列组成的矩阵.

证 由于$[sI-A]^{-1}B=N_1(s)D_1^{-1}(s)$，因而得

$$[-B \vdots sI-A]\begin{bmatrix} D_1(s) \\ N_1(s) \end{bmatrix}=0. \tag{6}$$

已知(A,B)能控，故 $B,sI-A$ 左互素，根据引理 2，(6)式可改写成下列形式

$$[U_1(s) \quad 0]\begin{bmatrix} D'_1(s) \\ N'_1(s) \end{bmatrix}=0, \tag{7}$$

其中

$$\begin{bmatrix} D'_1(s) \\ N'_1(s) \end{bmatrix}=Q^{-1}(s)\begin{bmatrix} D_1(s) \\ N_1(s) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

将(7)式分解成下列形式

$$[\overbrace{U_1(s)}^{n} \quad \overbrace{0}^{p}]\begin{array}{l}\begin{bmatrix} D'_1(s) \\ N'_{11}(s) \\ N'_{12}(s) \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\}p \\ \}n-p \\ \}p\end{array}=0. \tag{9}$$

选取

$$\begin{bmatrix} D'_1(s) \\ N'_{11}(s) \end{bmatrix}=0, \quad N'_{12}(s)=I_p, \tag{10}$$

将其代入(8)式得

$$\begin{bmatrix} D_1(s) \\ N_1(s) \end{bmatrix}=Q(s)\begin{bmatrix} D'_1(s) \\ N'_1(s) \end{bmatrix}=Q(s)\begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}=Q_p(s). \tag{11}$$

因为 $Q(s)$是么模阵，所以 $N_1(s),D_1(s)$右互素. 定理 1 证毕.

2.2 $C[sI-A]^{-1}$矩阵的左互素分解

引理 3 若(A,C)能观，则 $C,sI-A$ 矩阵右互素[4].

引理 4 若 $C,sI-A$ 右互素，则存在有$(n+m)\times(n+m)$么模矩阵 $P(s)$，使得

$$P(s)\begin{bmatrix} -C \\ sI-A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_2(s) \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l}\}n \\ \}m\end{array}, \tag{12}$$

其中 $U_2(s)$为 $n\times n$ 么模矩阵.

定理 2 若(A,C)能观，则 $C[sI-A]^{-1}$的一组左互素分解矩阵 $N_2(s),D_2(s)$由下式确定.

$$[D_2(s) \quad N_2(s)]=P_m(s), \tag{13}$$

其中 $P_m(s)$为么模行变换矩阵 $P(s)$的后 m 行组成的矩阵.

证明方法同定理1. 从略.

2.3 $C[sI-A]^{-1}B$ **矩阵的互素分解**

设 $C[sI-A]^{-1}B$ 的右互素分解矩阵为 $N_r(s), D_r(s)$，已知 $[sI-A]^{-1}B$ 的右互素分解 $N_1(s), D_1(s)$，于是得

$$N_r(s)=CN_1(s),\quad D_r(s)=D_1(s). \tag{14}$$

另设 $C[sI-A]^{-1}B$ 的左互素分解为 $D_l(s), N_l(s)$，已知 $C[sI-A]^{-1}$ 的左互素分解 $N_2(s)$，$D_2(s)$，于是得

$$N_l(s)=N_2(s)B,\quad D_l(s)=D_2(s). \tag{15}$$

3. 互素分解矩阵的计算方法

3.1 $D_1(s), N_1(s)$ 的计算

由定理1可知，计算 $D_1(s), N_1(s)$ 矩阵、就是计算 $Q_r(s)$ 矩阵，亦即计算 $Q(s)$ 矩阵. $Q(s)$ 矩阵是将 $[-B|sI-A]$ 矩阵变换成 $[U_1(s)\quad 0]$ 时的列变换矩阵. 它是么模矩阵，并由基本列变换矩阵的积所组成，即

$$Q(s)=Q_1(s)Q_2(s),\cdots,Q_k(s). \tag{16}$$

从而得

$$Q_r(s)=Q(s)\begin{bmatrix}0\\I_r\end{bmatrix}=Q_1(s),\cdots,Q_k(s)\begin{bmatrix}0\\I_r\end{bmatrix}. \tag{17}$$

基本变换矩阵有下列三种形式

$$(a)\ \begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\alpha&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow i\text{行}\\\\\\\\\end{array}\\ \uparrow i\text{列}&\end{array},\quad (b)\ \begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&0\cdots0&\beta(s)&&\\&&&\ddots&0&&\\&&&&\vdots&&\\&&&&0&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\\\\leftarrow i\text{行}\\\\\\\\\leftarrow j\text{行}\\\\\\\end{array}\\ \uparrow i\text{列}\quad \uparrow j\text{列}&\end{array},\quad (c)\ \begin{array}{cl}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&0\cdots0&1&&\\&&&\vdots\ 1\ \ \ &0&&\\&&&\vdots\ \ \ \ddots&\vdots&&\\&&&0\ \ \ \ \ 1&\vdots&&\\&&&1\ 0\cdots&0&&\\&&&&&1&\\&&&&&&\ddots\ 1\end{bmatrix}&\begin{array}{l}\\\\\\\leftarrow i\text{行}\\\\\\\\\leftarrow j\text{行}\\\\\end{array}\\ \uparrow i\text{列}\quad \uparrow j\text{列}&\end{array} \tag{18}$$

基本变换阵 (a)，作列变换时，其作用是将第 i 列增大 α 倍. 作行变换时，是将第 i 行增大 α 倍，α 为实常数，这种变换以 $(i)\times\alpha$ 表示.

基本变换阵 (b)，作列变换时，其作用是将第 i 列的 $\beta(s)$ 倍加到第 j 列上，以 $(j)+(i)\times\beta(s)$ 表示；作行变换时，是将第 j 行的 $\beta(s)$ 倍加到第 i 行上，以 $(i)+(j)\times\beta(s)$ 表示，$\beta(s)$ 为 s 的多项式.

基本变换阵 (c)，作列变换时，是将第 i 列和第 j 列对调；作行变换时，是将第 i 行和第 j 行对调以 $(i)\rightleftharpoons(j)$ 表示.

在对 $[-B|sI-A]$ 矩阵实行基本列变换过程中，取得基本列变换矩阵 $Q_j(s)(j=1,2,\ldots,$

k)，然后利用这些矩阵对 $\begin{bmatrix}0\\I_p\end{bmatrix}$ 矩阵顺次实行行变换就得到了 $Q_p(s)$ 矩阵，从而得到 $D_1(s)$，$N_1(s)$ 矩阵了.

3.2 $N_2(s)$，$D_2(s)$**的计算**

对 $\begin{bmatrix}-C\\sI-A\end{bmatrix}$ 矩阵实行基本行变换，使其成为 $\begin{bmatrix}U_2(s)\\0\end{bmatrix}$ 矩阵，从而得到变换矩阵

$$P(s)=P_k(s)P_{k-1}(s),\cdots,P_2(s)P_1(s),$$

及

$$P_m(s)=[0\quad I_m]P_k(s)P_{k-1}(s),\cdots,P(s)P_1(s) \tag{19}$$

$$[D_2(s)\quad N_2(s)]=P_m(s). \tag{20}$$

$D_r(s)$，$N_r(s)$；$D_l(s)$，$N_l(s)$的计算，通过计算 $D_1(s)$，$N_1(s)$；$D_2(s)$，$N_2(s)$很容易就得到了.

4. 例　题

例 1 已知能控系统矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$$

计算$[sI-A]^{-1}B$的右互素分解矩阵 $D_1(s)$，$N_1(s)$.

4.1 **计算方法 I**

$$[-B\ \vdots\ sI-A]=\begin{bmatrix}(1)&(2)&(3)&\vdots&(4)&(5)&(6)&(7)&(8)\\-1&-1&0&\vdots&s&-1&0&0&0\\0&0&0&\vdots&0&s&-1&0&0\\0&0&-1&\vdots&0&0&s&0&0\\-1&0&0&\vdots&0&0&0&s&0\\0&-1&0&\vdots&0&0&0&0&s\end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow[\substack{⑤(8)+(4),\quad ⑥(5)+(6)\times s,\\ ⑦(4)+(5)\times s,\quad ⑧(4)\rightleftharpoons(6)}]{\substack{①(7)+(1)\times s,\quad ②(8)+(2)\times s,\\ ③(6)+(3)\times s,\quad ④(7)+(4),}}\begin{bmatrix}(1)&(2)&(3)&\vdots&(4)&(5)&(6)&(7)&(8)\\-1&-1&0&\vdots&0&-1&0&0&0\\0&0&0&\vdots&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&\vdots&0&0&0&0&0\\-1&0&0&\vdots&0&0&0&0&0\\0&-1&0&\vdots&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\\(5)\\(6)\\(7)\\(8)\end{array}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{④(4)+(8),\\ ④(4)+(7),\\ ⑥(3)+(6)\times s}]{\substack{①(4)\rightleftharpoons(6)\\ ②(5)+(4)\times s,\quad ⑦(2)+(8)\times s,\\ ③(6)+(5)\times s,\quad ⑧(1)+(7)\times s.}}\left[\begin{array}{ccc}0&s&0\\0&0&s\\s^3&0&0\\\hdashline 1&1&0\\s&0&0\\s^2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right].$$

于是得

$$D_1(s)=\begin{bmatrix}0&s&0\\0&0&s\\s^3&0&0\end{bmatrix},\quad N_1(s)=\begin{bmatrix}1&1&1\\s&0&0\\s^2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

4.2 计算方法Ⅱ

$$\left[\begin{array}{cc}-B&sI-A\\\hdashline \multicolumn{2}{c}{I}\end{array}\right]=\begin{array}{cccccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)&(6)&(7)&(8)\end{array}\\\left[\begin{array}{cccccccc}-1&-1&0&s&-1&0&0&0\\0&0&0&0&s&-1&0&0\\0&0&-1&0&0&s&0&0\\-1&0&0&0&0&0&s&0\\0&-1&0&0&0&0&0&s\\\hdashline \multicolumn{8}{c}{I}\end{array}\right]$$

$$
\xrightarrow[\substack{⑤\ (8)+(4),\\ ⑥\ (5)+(6)\times s,\\ ⑦\ (4)+(5)\times s,\\ ⑧\ (6)\rightleftharpoons(4),}]{\substack{①\ (7)+(1)\times s,\\ ②\ (8)+(2)\times s,\\ ③\ (6)+(3)\times s,\\ ④\ (7)+(4),}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc:ccc}
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s\\
0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 & 0 & 0\\
\cdashline{6-8}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}.
$$

例 2　已知系统矩阵为

$$
A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},\
B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\
C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

计算 $D_l(s)$，$N_l(s)$。

首先计算 $D_2(s)$，$N_2(s)$

$$
\begin{bmatrix} -C\\ sI-A \end{bmatrix}=
\begin{array}{c} (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4)\\ (5)\\ (6)\\ (7) \end{array}
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
\hdashline
s & 1 & 0 & 0 & -1\\
-1 & s+1 & -3 & 0 & 0\\
0 & 0 & s+2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & s & 3\\
0 & 0 & -1 & -1 & s+4
\end{array}\right],
$$

$$
\xrightarrow[\substack{⑦(3)+(4)\times s, & ⑧(3)-(6)\times 3\\ ⑨(5)+(6), & ⑩(6)\times 2\\ ⑪(6)+(5)\times S, & ⑫(7)\rightleftharpoons(3)}]{\substack{①(3)+(1), & ②(4)+(1)\times(s+1)\\ ③(3)-(2), & ④(6)+(2)\times 3\\ ⑤(7)+(2)\times(s+4), & ⑥(6)+(7)\times s}}
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right],
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7)
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{③ (6)×2,　④ (6)+(5),}]{\text{①(3)⇌(7),　②(5)+(6)×s,}}
$$

$$
\xrightarrow{\text{⑤ (6)−(3)×3,　⑥ (4)+(3)×s,　⑦ (7)+(6)×s,　⑧ (2)+(7)×(s+4)}}
$$

$$
\xrightarrow{\text{⑨ (2)+(6)×3,　⑩ (2)−(3),　⑪ (1)+(4)×(s+1),　⑫ (1)+(3)}}
\left[\begin{array}{cc:ccccc} 0 & s^3+6s^2+11s+6 & 0 & 0 & s & s+2 & s(s+2) \\ s^2+s+1 & -s^2-12s-10 & 1 & s & 0 & -3 & -3s \end{array}\right].
$$

由此得

$$
D_l(s) = D_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & s^3+6s^2+11s+6 \\ s^2+s+1 & -s^2-12s-10 \end{bmatrix},
$$

$$
N_l(s) = N_2(s)B = \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & 3^2-s+2 & s \\ -3 & -3s-3 & s+1 \end{bmatrix}.
$$

参 考 文 献

[1] 张福恩,状态反馈极点配置,自动化学报,2,(1986),

[2] 张福恩,输出反馈极点配置问题,自动化学报,1,(1987),38—44.

[3] 张福恩,PI和PID调节器设计,控制理论与应用,2,(1988),22—29.

[4] 曹长修,控制中的矩阵理论,科学出版社,北京,(1979).

New Algorithm of Coprime Fraction for Transfer Function Matrix $C[sI-A]^{-1}B$

Zhang Fuen

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technolyge)

Abstract: In this paper a new algorithm of coprime fraction matrices for the $[sI-S]^{-1}B$, $C[sI-A]^{-1}$, $C[sI-A]^{-1}B$ matrices is given by using fundamental transformation of the matrix. It is simpler and more pructical then the existing algorithm. Finally, the application is illustrated by two examples.

Key words: multivariable control system; pole asignment; polynomial matrix; coprime fraction of polynomial matrix