第7卷 第3期
1990年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 3
Sept., 1990

用常数阵实现对角优势的条件和算法

古 孝 鸿
(电子科技大学自动化系,成都)

摘要 本文严格证明了用常数预补偿阵实现对角优势的必要条件和充分条件,给出了简明而实用的判据,证明了本文所得之解是最优的.最后,给出了计算步骤和实例.

关键词: 多变量系统;INA 法;对角优势

1. 前 言

在线性多变量控制系统频域法中,INA 法是一种好方法.实施此方法的关键在于实现对角优势化.在现代频域设计的几种 方法中实现对角优势都很有好处.而采用常数阵作为预补偿阵是最为简单方便的.但实现对角优势并非一个简单的问题.为避免正面回答问题,出现了伪对角化等方法[1,2].由于这些方法缺少明确的物理含义,在计算中途带有盲目性,只能在最后阶段通过检验去核实所得之解是否合用.为此,一些学者仍在继续研究此问题[3-6].

本文严格证明了可实现性的必要条件与充分条件,判据简明实用.证实了所得之解是最优的.二维待解方程构成方便,不需求逆阵,计算量小.最后,提供了一套算法和给出了一个计算实例.

2. 可实现性判据

设受控对象 $G(s)$ 在 $s=j\omega$ 时的逆阵记为 $\hat{G}(j\omega)\in R^{m\times m}$.在 $G(s)$ 前引入常数预补偿阵 $K\in R^{m\times m}$.将 $\hat{G}(j\omega)$ 和 $\hat{K}^T$ 按列进行分解,有

$$\begin{aligned}\hat{G}(j\omega)&=[g_1(j\omega),g_2(j\omega),\dots,g_m(j\omega)]\\&=[\alpha_1+j\beta_1,\alpha_2+j\beta_2,\dots,\alpha_m+j\beta_m],\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\hat{K}^T=[k_1,k_2,\dots,k_m].\tag{2.2}$$

要 $\hat{K}\hat{G}(j\omega)$ 的第 i 行具有行优势,就是要求

$$|k_i^Tg_i(j\omega)|>\sum_{l=1\ l\neq i}^{m}|k_i^Tg_l(j\omega)|,\qquad i\in\underline{m}.\tag{2.3}$$

我们把含相同未知数且解集相同的两个不等式称为同解不等式.可证:上式与下式同解

$$|k_i^Tg_i|^2>[\sum_{l=1\ l=1}^{m}|k_i^Tg_l|]^2,\qquad i\in\underline{m}.$$

$$\because\qquad\sum_{l=1\ l\neq i}^{m}|k_i^Tg_l|^2\leqslant[\sum_{l=1\ l\neq i}^{m}|k_i^Tg_l|]^2\leqslant(m-1)\sum_{l=1\ l\neq i}^{m}|k_i^Tg_l|^2,$$

本文于1988年12月22日收到.1989年9月25日收到修改稿.

显然，如第 i 行具有行优势，则必有

$$|k_i^T g_i|^2 > \sum_{l=1\ l\neq 1}^{m} |k_i^T g_l|^2;$$

反之，如下式成立，则第 i 行必具有行优势： (2.4a)

$$|k_i^T g_i|^2 > (m-1)\sum_{l=1\ l\neq i}^{m} |k_i^T g_l|^2. \tag{2.4b}$$

结论 1 由常数阵 K 实现行优势的必要条件是式(2.4a)成立；充分条件是式(2.4b)成立.

易证，式(2.4)的两式分别有同解不等式

$$k_i^T g_i g_i^* k_i > \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} k_i^T g_l g_l^* k_i, \tag{2.5a}$$

$$k_i^T g_i g_i^* k_i > \frac{m-1}{m}\sum_{l=1}^{m} k_i^T g_l g_l^* k_i. \tag{2.5b}$$

此二式形相似，可统一写为

$$k_i^T g_i g_i^* k_i = \lambda_i \sum_{l=1}^{m} k_i^T g_l g_l^* k_i. \tag{2.6}$$

结论 2 由常数阵 K 实现行优势的必要条件是：存在 $\lambda_i > 1/2$ 使式(2.6)满足；进一步，如 $\lambda_i > (m-1)/m$，则条件是充分的.

因 $k_i^T g_l g_l^* k_i$ 是二次型，故 $k_i^T g_l g_l^* k_i = k_i^T(\alpha_l \alpha_l^T + \beta_l \beta_l^T)k_i$，则式(2.6)可改写为

$$k_i^T A_i k_i = \lambda_i k_i^T B k_i, \tag{2.7}$$

其中

$$A_i = \alpha_i \alpha_i^T + \beta_i \beta_i^T, \tag{2.8}$$

$$B = \sum_{l=1}^{m} (\alpha_l \alpha_l^T + \beta_l \beta_l^T). \tag{2.9}$$

根据上述及文献[7]立即得到

定理 1 实现行对角优势的必要条件是：存在 $\lambda_i > 1/2$ 使 $(A_i - \lambda_i B)$，$\forall\, i \in \underline{m}$，非负定；进一步，当 $\lambda_i > (m-1)/m$，则条件是充分的.

由于 k_i 待定，k_i 的取值影响到 λ_i 的取值，故不存在既必要又充分的条件是很自然的. 当 $\lambda_i < 1/2$ 或 $\lambda_i > (m-1)/m$ 时结论是明确的，否则属可疑情况，只得对最后计算结果进行检验.

上述结果显然比文献[4]类似结果为优.

易知，A_i 和 B 非负定. 下述结论今后有用：

结论 3 矩阵 B 正定.

证 由于 $\hat{G}^*\hat{G}$ 半正定，其特征值 $\mu \geqslant 0$. 因 $\hat{G}$ 可逆，则 $\hat{G}\hat{G}^*$ 应无 $\mu = 0$ 的特征值. 否则，

$$|\mu I_m - \hat{G}\hat{G}^*| = -|\hat{G}\hat{G}^*| = -|\hat{G}|\cdot|\hat{G}^*| = 0,$$

造成矛盾结果. 于是 $\hat{G}\hat{G}^*$ 正定. 从而知 $B = \frac{1}{2}[\hat{G}\hat{G}^* + (\hat{G}\hat{G}^*)^T]$ 正定. 证毕.

3. 最优解

前面的论述表明：虽然 λ_i 不是优势度，但 λ_i 的大小可以说明第 i 行是否具有行优势，且 λ_i 愈大则优势程度愈高. 故可将 λ_i 作为第 i 行对角优势度的表征. 由式(2.7)有

$$\frac{1}{\lambda_i}=\frac{k_i^TBk_i}{k_i^TA_ik_i}. \tag{3.1}$$

要 λ_i 尽可能大，则 $1/\lambda_i$ 应尽可能小. 对式(3.1)进行极小化，最后可得

$$A_ik_i=\lambda_iBk_i,\qquad i\in \underline{m}. \tag{3.2}$$

这就得到了一个广义特征值与特征向量问题. 求出最大特征值和对应的特征向量，重复 m 次便得到了常数预补偿阵 $\hat{K}$.

本文后面将证明，式(3.2)的特征值必全为实数. 根据文献[8]，易证：

结论 4　对于式(3.2)，有$(m-2)$个零特征值，两个非负特征值由下式确定：

$$\left|\lambda_iI_2-\begin{bmatrix}\alpha_i^T\\ \beta_i^T\end{bmatrix}B^{-1}[\alpha_i,\beta_i]\right|=0. \tag{3.3}$$

记此式最大特征值为 $\lambda_{i\max}$. 给定实数 λ，根据文献[7]不难证明：当 $\lambda<0$ 时 $(A_i-\lambda B)$ 正定；当 $\lambda>\lambda_{i\max}$ 时 $(A_i-\lambda B)$ 负定. 这就说明不可能有大于 $\lambda_{i\max}$ 且满足定理1的 λ_i 存在. 因而归纳为

定理 2　方程(3.2)最大特征值 $\lambda_{i\max}$ 所对应的特征向量 k_i, $\forall\, i\in\underline{m}$，组成频率为 ω 时的最佳常数预补偿阵 $\hat{K}$. 实现行对角优势的必要条件是 $\lambda_{i\max}>1/2$；充分条件是 $\lambda_{i\max}>(m-1)/m$.

特征值计算是求解过程中必不可少的一步，故在计算中途可用于进行可实现性检验. 此判据比前述定理1和文献[4,5]中的结果更为方便和实用.

进一步研究如何求解方程(3.2)的问题. 记

$$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m],$$
$$\beta=[\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m].$$

因 B 正定故 B 的特征值 $\mu_i>0$，则$[\alpha,\beta]$的奇异值 $\sigma_i=\sqrt{\mu_i}>0, i\in\underline{m}$. 设 $\sum=\mathrm{diag}[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m]$，必存在[8]正交阵 Q，使

$$Q^TBQ=\sum{}^2=\mathrm{diag}[\sigma_1^2,\sigma_2^2,\ldots,\sigma_m^2].$$

设 $\sum Q^Tk_i=x_i$，式(3.2)可改写为

$$\sum{}^{-1}Q^T[\alpha_i,\beta_i]\begin{bmatrix}\alpha_i^T\\ \beta_i^T\end{bmatrix}Q\sum{}^{-1}x_i=\lambda_ix_i,\qquad i\in\underline{m}. \tag{3.4}$$

这时已将广义特征值问题化为普通特征值问题. 上述对称阵的求解较为简单. 当求得 x_i 之后，可计算出 k_i.

$$k_i=Q\sum{}^{-1}x_i,\qquad i\in\underline{m}. \tag{3.5}$$

应当指出，在实际计算时，可先计算出

$$F=\sum{}^{-1}Q^T[\alpha,\beta]. \tag{3.6}$$

式(3.4)中的 $\sum^{-1}Q^T[\alpha_i,\beta_i]$ 只不过是 F 的第 i 列和第$(i+m)$列元素所组成的矩阵而已.

4. 二维简化计算

如下构成 $2m\times2$ 辅助矩阵 E_i 和 2 维向量 y_i：

$$E_i=[e_1,e_2,\ldots,e_i,\ldots,e_m,\ldots,e_{m+i},\ldots,\quad e_{2m}]^T, \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} e_i &= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad e_{m+i} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \\ e_j &= \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad (j \neq i); \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$y_i = \begin{bmatrix}\alpha_i^T\\ \beta_i^T\end{bmatrix} k_i. \tag{4.3}$$

注意到 $FE_i = \sum^{-1} Q^T[\alpha_i, \beta_i]$，式(3.2)可改写为

$$E_i^T F^T F E_i y_i = \lambda_i y_i, \quad i \in \underline{m}. \tag{4.4}$$

由于 $E_i^T F^T F E_i \in R^{2\times 2}$，我们得到二维特征值与特征向量问题. 可以证明：$E_i^T F^T F E_i = \begin{bmatrix}\alpha_i^T\\ \beta_i^T\end{bmatrix} B^{-1}[\alpha_i, \beta_i]$，故式(4.4)与式(3.2)有相同的特征值. 且易证实：$E_i^T F^T F E_i$ 正定. 从而说明特征值必为正实数. 再次表明结论 4 是正确的.

求得最大特征值 λ_{imax} 和对应特征向量 y_i 之后，从而可求出

$$k_i = \frac{1}{\lambda_{imax}} Q \sum^{-2} Q^T [\alpha_i, \beta_i] y_i. \tag{4.5}$$

容易证实：k_i 满足式(3.2)，因而是 λ_{imax} 所对应的特征向量. 根据定理 2 它就是最优解.

前已指出 FE_i 是 F 的第 i 列和第 $(i+m)$ 列元素组成的矩阵. 当已求得 F 分别对 $i=1, 2, \ldots, m$ 构成方程(4.4)时，计算和程序都比较简单. 求 F 时除对角阵 $\sum$ 求逆的简单运算外，没有一般求逆运算. 对于高阶特别是病态方程这是重要的.

由上述说明可见：本文结果较文献[6]的类似结果为优.

易将上述结果推广到多个频率点的情况.

5. 计算步骤及举例

建议采用如下的计算步骤：

1) 计算 B 及其特征值 $\mu_i, i \in \underline{m}$. 应有 $\mu_i > 0$.

2) 按递推法求正交阵 Q：

设 $B_0 = B$；$j \geq 0$，$(m-j)$ 维列向量 v_{j+1} 是式(5.2)中的 $(m-j)$ 阶方阵 B_j 的特征值 μ_{j+1} 所对应的标准化特征向量. 根据文献[8]，可按下列递推公式求标准化向量 ε_j, u_j 和镜象矩阵 H_j：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_j &= [1, 0, 0, \ldots, 0] \in R^{(m-j+1)}, \\ u_j &= \frac{v_j - \varepsilon_j}{\| v_j - \varepsilon_j \|} \in R^{(m-j+1)}, \\ H_j &= I_{m-j+1} - 2u_j u_j^T \in R^{(m-j+1)\times(m-j+1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

这里的 H_j 既是正交阵又是对称阵，且必有

$$H_j^T B_{j-1} H_j = \begin{bmatrix}\mu_j & 0\\ 0 & B_j\end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

对于 $j=1, 2, \ldots, r$. 依次按递推公式(5.1)，(5.2)计算出 H_j 及 B_j，直到 B_r 成为对角阵为止. 此时必有 $B_r = \mathrm{diag}[\mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \ldots, \mu_m]$. 显然 $r \leq m$. 在许多情况下 r 都不大，甚至有时 $r=1$，即经过一轮运算便已达到目的. 进一步可求得

$$Q = H_1 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & H_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{r-1} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

3) 按式(3.6)计算 F.

4) 构成方程(4.4). 求最大特征值及相应的特征向量，根据定理 2 判断可否实现行优势.

5) 由式(4.5)计算 $k_i, \forall\, i \in \underline{m}$. 并按式(2.2)构成最佳预补偿阵 $\hat{K}$.

研究 30 层蒸馏塔的典型例子. 传递阵为

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.088}{(1+75s)(1+722s)} & \dfrac{0.1825}{(1+15s)(1+722s)} \\ \dfrac{0.282}{(1+10s)(1+1850s)} & \dfrac{0.412}{(1+15s)(1+1850s)} \end{bmatrix}.$$

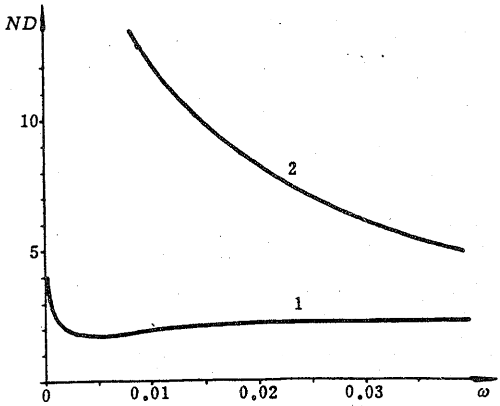
记 $\hat{G}_o(s) = \hat{G}(s)/d(s)$，其中 $d(s) = 0.015209 + 3.4973s$. 由于 $d(s)$ 不影响对角优势化，故可仅按

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} -0.412(1+10s)(1+75s)(1+722s), & 0.1825(1+10s)(1+75s)(1+1850s) \\ 0.282(1+15s)(1+75s)(1+722s), & -0.088(1+10s)(1+15s)(1+1850s) \end{bmatrix}$$

进行计算. 取 $\omega = 0.01$ 弧度/秒，最后可得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.15962 & 0.65272 \\ 0.50423 & 0.74308 \end{bmatrix}.$$

定义优势度 ND 为主元模与非主元模和之比. 优势度曲线如右图所示.



优势度曲线

参 考 文 献

[1] Rosenbröck, H. H., Computer—aided Control System Design, N. Y., Acadmic Press INC., (1974), 162—172.

[2] Johnson, M. A., Diagonal Dominance and the Method of Pseudodiagonalisation, Proc. IEE, 126, 10, (1979). 1011—1017.

[3] Wang Shilin and Kai Pingan, Design of Diagonal Dominance by Compensator, Int. J. Control, 30, (1983), 221—227.

[4] 聂为清，对角优势的可实现性，信息与控制，13，2，(1984)，1—5.

[5] 江青茵，对角优势的常数阵实现，控制理论与应用，5，1，(1988)，84—89.

[6] 鲍远律等，实现对角优势的动态补偿器的设计，信息与控制，13，1，(1984)，17—21.

[7] 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，北京，(1984)，164—178.

[8] 屠伯埙，线性代数——方法导引，复旦大学出版社，上海，(1986)，119—157.

The Condition and the Algorithm for Achieving Diagonal Dominance with a Constant Compensator

Gu Xiaohong

(Department of Automation, University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu)

Abstract: In this paper, the necessary and sufficient conditions to achieve diagonal dominance with a constant compensator are proved strictly, some brief and practical criteria are presented. It is shown that the solution obtained in this paper is optimal. The algorithm and example are also provided.

Key words: multivariable system; inverse nyquist method; diagonal dominance