非最小相位 AR 模型的 L_p 反褶积

贾 沛 璋
（中国科学院系统科学研究所，北京）

摘要　本文讨论 $y_n=h_n*X_n$ 为 $AR(q)$ 模型，输入 $\{X_n\}$ 为零均值独立同分布平稳序列，脉冲响应 $\{h_n\}$ 为非最小相位的线性系统，如何由输出 $\{y_n\}$ 的样本序列 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 估计系统的自回归系数 $a_0, a_1, \cdots, a_q$ 的反褶积问题，提出 $L_p(1<p<2)$ 方法，即在约束条件 $\sum_{k=0}^{q} a_k h_{-k}=1$ 之下，使 $\sum_{n=q+1}^{N}\left|\sum_{k=0}^{q} a_k y_{n-k}\right|^p$ 达极小。当有 $\{h_{-k}\}(0\leqslant k\leqslant q)$ 的初始估计 $\{h_{-k}^{(0)}\}$ 时，可由 $\{h_{-k}^{(0)}\}\to\{a_k^{(1)}\}\to\{h_{-k}^{(1)}\}\to\cdots$ 进行迭代求解；在由 $\{h_{-k}^{(1)}\}$ 求解 $\{a_k^{(1)}\}$ 时，采用迭代加权最小二乘方法解 Lp 最优问题. 文中给出的模拟计算例子表明了上述迭代方法的收敛性，且 p 愈接近1，迭代收敛域愈宽，而收敛速度愈慢，综合两者，作者认为宜选取 $1.2\leqslant p\leqslant 1.5$.

关键词：　反褶积；非最小相位；自回归模型

1. 引　　言

假定线性系统的脉冲响应为 $\{h_n\}$，输入为零均值独立同分布的非高斯平稳序列 $\{X_n\}$，系统的输出为

$$Y_n = h_n * X_n. \tag{1}$$

现在所考虑的反褶积问题，是只知 $\{X_n\}$ 的类型，要由 $\{Y_n\}$ 的有限样本 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 作出对 $\{h_n\}$ 的估计. 当 $\{h_n\}$ 为最小相位时，经常采用的方法是预测反褶积；如果(1)式同时为 AR 模型，则可采用最大熵反褶积，它给出 L_2 范数意义下对 $\{h_n\}$ 的最优估计，对此情形，文献[1]中还提出可采用 $L_p(1\leqslant p<2)$ 反褶积，作为对最小相位系统 $\{h_n\}$ 的 Robust 估计.

当 $\{h_n\}$ 为非最小相位时，有高阶谱方法，它基于对 $\{Y_n\}$ 的振幅谱、双谱或三重谱的估计；如果(1)式同时为 MA 模型，文献[2]中提出了一种仅仅依赖 $\{Y_n\}$ 的振幅谱、边缘双谱或边缘三重谱的高阶谱方法；如果(1)式同时为 AR 模型，可采用最小熵方法，文献[3]中对该方法作了较为透彻的研究，给出了较广泛的一类目标函数，并证明了对相应非线性方程组迭代算法的收敛性，特别地，可采用最小熵 O_2^α 方法(α 接近2)来获得对 $\{h_n\}$ 的估计.

对 $\{h_n\}$ 为非最小相位且(1)式为 AR 模型的情形，文献[4]中提出了 L_p 反褶积方法，这是一个迭代算法，其中采用线性规划方法求解 L_1 极值问题，文献中证明了，在 $P(x_n=0)\neq 0$ 的条件下，该迭代算法的收敛性.

本文考虑 $\{h_n\}$ 为非最小相位且(1)式为 AR 模型的情形，将提出 Lp 反褶积方法，它适用于 $P(X_n=0)=0$ 的情形. 该方法的提出主要来自地震信号处理的需要，原来以为地层反射系数序列 $\{X_n\}$ 一般会服从贝努里高斯分布(从而有 $P(X_n=0)\neq 0$)，这样 L_1 方法将是一个理想的反褶积

本文于1989年3月27日收到. 1989年9月12日收到修改稿.

方法，但实际工作否定了这一看法，从测井记录中发现，地层反射序列常常满足 $P(X_n=0)=0$，这样就必须作新的研究．当然，从反褶积方法本身来说，文献[4]中的 L_1方法与本文的 L_p 方法将是一个很好的相互补充．

2．L_p 准则与算法

考虑(1)式为 $AR(q)$模型的情形．假定式中$\{h_n\}$的 z 变换为

$$A(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_qz^q, \tag{2}$$

它在单位圆周上无零点，而在单位圆内有零点，即$\{h_n\}$为非最小相位的，此时(1)式可写为

$$a_0y_n+a_1y_{n-1}+\cdots+a_qY_{n-q}=X_n. \tag{3}$$

系统的传递函数为

$$H(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_mz^m=\frac{1}{A(z)}. \tag{4}$$

由于 $A(z)$在单位圆周上无零点，所以$\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}|h_m|<\infty$(3)式中$\{x_n\}$为零均值独立同分布非高斯序列，(3)式中的$\{Y_n\}$为平稳非最小相位 $AR(q)$序列．此时的反褶积问题等价于由$\{Y_n\}$的样本 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 去估计(3)式中的参数 $a_0,a_1,\cdots,a_q$.

这里，首先给出 L_p 准则，并证明 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 是 L_p 范数意义下的最优解之一．

命　题　设 ξ、η 是零均值独立随机变量，$p\geqslant1$，则有

$$E|\xi+\eta|^p\geqslant\max(E|\xi|^p,E|\eta|^p). \tag{5}$$

证　由 Hölder 不等式：

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^rdx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^sdx\right)^{\frac{1}{s}},$$

式中

$$f(x)\in L_r,\quad g(x)\in L_s,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

可知

$$|EX|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}xdF_x(x)\right|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^pdF_x(x)\right)^{\frac{1}{p}}=(E|x|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

从而

$$E|\xi+\eta|^p=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x+y|^pdF_\xi(x)dF_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}E|x+\eta|^pdF_\xi(x)$$

$$\geqslant\int_{-\infty}^{\infty}|E(x+\eta)|^pdF_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^pdF_\xi(x)=E|\xi|^p.$$

同理可证

$$E|\xi+\eta|^p\geqslant E|\eta|^p\qquad(p\geqslant1).$$

定　理　设$\{y_n\}$是(3)的平稳解，则对任何满足$\sum\limits_{k=0}^{q}b_kh_{-k}=1$的 $b_0,b_1,\cdots,b_q$ 都有

$$E\left|\sum_{k=0}^{q}b_kY_{n-k}\right|^p\geqslant E\left|\sum_{k=0}^{q}a_kY_{n-k}\right|^p\qquad(p\geqslant1), \tag{6}$$

这里 $h_0,h_{-1},\cdots,h_{-q}$由(4)式确定．

该定理的证明不难由(1)式和(5)式导出．此定理表明在超平面$\sum\limits_{k=0}^{q}b_kh_{-k}=1$ 上，$(a_0,a_1,\cdots,a_q)$是 $E|\sum\limits_{k=0}^{q}b_kY_{n-k}|^p$ 的最小值之一．它的样本形式意味着，$(a_0,a_1,\cdots,a_q)$是下述条件极值问题的解：

$$\min \frac{1}{N}\sum_{n=q+1}^{N}\left|\sum_{k=0}^{q} b_k y_{n-k}\right|^p, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{q} b_k h_{-k} = 1,$$

式中 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 为 $\{Y_n\}$ 的样本. 这就是平稳非最小相位 AR 参数估计的 L_p 准则，这里我们感兴趣的 p 的取值范围为 $1\leqslant p<2$.

对 L_p 准则 $(1<p<2)$，它对应一个具有线性约束和严格凸目标函数的非线性规划问题，与 L_1 准则相反，该问题的最优解一般不位于由约束方程构成的凸多面体的顶点上，由此它适用于 $P(X_n=0)=0$ 的情形.

对由(7)式给出的条件极值问题，必须采用迭代方法求解. 即首先给出 $\{h_{-k}\}$ $(0\leqslant k\leqslant q)$ 的初始估计 $\{h_{-k}^{(0)}\}$ $(0\leqslant k\leqslant q)$，代入(7)式的约束方程，使(7)式化为无约束 Lp 极值问题，解出 $\{a_k^{(1)}\}$，然后由 $H(z)$ 与 $A(z)$ 之间的关系式(2)、(4)，利用 FFT 求得 $\{h_{-k}^{(1)}\}$，再代入(7)式解出 $\{a_k^{(2)}\}$，以此循环迭代至收敛.

对无约束 L_p 极值问题将采用迭代加权最小二乘算法[5]求解. 记 $\{h_{-k}\}$ 的某次迭代值为 $\{h_{-k}^*\}$，对应(7)式现要解下述 L_p 极值问题：

$$\min \frac{1}{N}\sum_{n=q+1}^{N}\left|\sum_{k=1}^{q} b_k (y_{n-k} - y_n \cdot h_{-k}^*/h_0^*) + y_n/h_0^*\right|^p, \quad (1<p<2). \tag{8}$$

这里假定 $h_0^*\neq 0$. 如记

$$x_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{q} b_k^{(i)} (y_{n-k} - y_n \cdot h_{-k}^*/h_0^*) + y_n/h_0^*, \tag{9}$$

其中 $\{b_k^{(i)}\}$ 表示 $\{b_k\}$ 的第 i 次迭代值. 对应(8)式的迭代加权最小二乘算法为

$$\min \frac{1}{N}\sum_{n=q+1}^{N}\frac{1}{W_n^{(i)}}\left|\sum_{k=1}^{q} b_k^{(i+1)} (y_{n-k} - y_n \cdot h_{-k}^*/h_0^*) + y_n/h_0^*\right|^2, \tag{10}$$

其中加权系数

$$W_n^{(i)} = \begin{cases} |\varepsilon|^{2-p} & \text{如 } |x_n^{(i)}|\leqslant\varepsilon, \\ |x_n^{(i)}|^{2-p} & \text{如 } |x_n^{(i)}|>\varepsilon, \end{cases} \tag{11}$$

初始加权 $W_n^{(0)}=1$. 当给定 $\{W_n\}$ 的第 i 次迭代值 $\{W_n^{(i)}\}$ 时，由(10)式用加权最小二乘算法可解出 $\{b_k\}$ 的第 $(i+1)$ 次迭代值 $\{b_k^{(i+1)}\}$，再由(11)式计算出 $\{W_n^{(i+1)}\}$，以此循环迭代，文献[5]中证明了该迭代的收敛性.

如果上述 $\{h_{-k}^*\}$ 是 $\{h_{-k}\}$ 的第 j 次迭代值 $\{h_{-k}^{(j)}\}$，则由上述迭代将给出 $\{a_k\}$ 的第 $j+1$ 次迭代值 $\{a_k^{(j+1)}\}$. 因此 L_p 方法包含两重迭代，一重是对(7)式，包含由 $\{h_{-k}^{(j)}\}$ 到 $\{a_k^{(j+1)}\}$，再到 $\{h_{-k}^{(j+1)}\}$ 的迭代；另一重是对(10)式，包含由 $\{W_n^{(i)}\}$，到 $\{b_k^{(i+1)}\}$，再到 $\{W_n^{(i+1)}\}$ 的迭代.

顺便指出，当两重迭代收敛时，由(9)式可得出对系统输入 $\{x_n\}$ 的估计 $\{\hat{x}_n\}$.

3. 仿真计算结果

本节给出两个对非最小相位 $AR(2)$ 系统和 $AR(4)$ 系统的仿真例子，系统的输入样本序列 $\{x_n\}$ 选用了由测井得来的地层反射系数序列. 它的样本均值近似为零，为对称连续分布，样本容量为 600.

$AR(2)$ 系统：

所仿真的系统传递函数为

$$H(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{(z+0.5)(z+2.5)},$$

自回归系数将最大值归一化后为

$$0.33333,\quad 1.0,\quad 0.41667.$$

第一重迭代中自回归系数的初值$\{a_k^{(0)}\}$取为(0.1,1.0,0.1),第二重迭代中加权系数的初值用(11)式计算,其中$\{x_k^{(0)}\}=\{y_k\}*\{a_k^{(0)}\}$.

$p=1$. 第一重迭代 12 次收敛,第二重迭代分别是 28,31,29,20,19,16,2,1,2,1,1,1 次.共计 151 次.所估计的自回归系数为(0.3186,1.0,0.4364).

$p=1.2$. 第一重迭代 12 次收敛,第二重迭代分别是 16,17,17,15,16,12,12,11,6,5,1,1 次,共计 129 次.所估计的自回归系数为(0.3215,1.0,0.4344).

$p=1.5$. 第一重迭代 20 次收敛,第二重迭代分别是 7,8,8,7,7,7,7,7,7,6,7,6,6,5,4,4,4,3,3,2 次,共计 115 次.所估计的自回归系数为(0.3244,1.0,0.4264).

$p=1.8$. 迭代收敛的解远离真解.

AR(4)系统:

所仿真的系统传递函数为

$$H(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{(z+0.5)(z+0.7)(z+2.5)(z+1.25)},$$

自回归系数最大值归一化后为

$$0.12539,\quad 0.62069,\quad 1.0,\quad 0.63480,\quad 0.13715.$$

第一重迭代中自回归系数的初值$\{a_k^{(0)}\}$取为(0.2,0.2,1.0,0.2,0.2).

$p=1.0$. 第一重迭代 16 次收敛,第二重迭代分别是 23,34,33,29,26,26,28,25,23,23,26,20,14,1,1,5 共计 337 次.所估计的自回归系数为(0.1232,0.6146,1.0,0.6428,0.1408).

$p=1.2$. 第一重迭代 20 次收敛,第二重迭代分别是 14,18,16,20,17,16,14,14,15,12,13,11,10,8,6,4,3,3,3,3,共计 220 次.所估计的自回归系数为(0.1168,0.6069,1.0,0.6474,0.1440).

$p=1.5$. 第一重迭代 20 次收敛,第二重迭代分别是 6,8,7,7,7,7,6,7,6,5,5,5,5,4,4,4,4,3,3,2,共计 105 次.所估计的自回归系数为(0.1126,0.6050,1.0,0.6486,0.1472).

$p=1.8$. 迭代收敛的解远离真解.

此外,迭代初值$\{a_k^{(0)}\}$选为(0.1,0.1,1.0,0.1,0.1)时,对$p=1.0$和$p=1.2$,迭代收敛到与上述相同的解,但对$p=1.5$和$p=1.8$,迭代收敛的解远离真解.

在上述所有仿真计算中,第二重迭代控制收敛是用下式:

$$\left|\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(i)}|^p-\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(i+1)}|^p\right|\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(i)}|^p<10^{-5},\tag{12}$$

其中 $\{x_k^{(i)}\}$表示第二重迭代中第i次迭代求得的$\{x_k\}$的估计.

第一重迭代为控制收敛,首先把每次迭代求得的$\{a_k^{(j)}\}$的最大值归一化,然后求得相应的$\{x_k\}$的估计$\{x_k^{(j)}\}$,用

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j)}|^p}{\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j)}|^2\right)^{p/2}}-\frac{\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j+1)}|^p}{\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j+1)}|^2\right)^{p/2}}\right|<10^{-5}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j)}|^p}{\left(\sum_{k=1}^{N}|x_k^{(j)}|^2\right)^{p/2}}\tag{13}$$

来作收敛的判别式. 或者,直接用下式控制收敛:

$$\sum_{k=0}^{q} |a_k^{(j)} - a_k^{(j+1)}| < q \times 10^{-5}. \tag{14}$$

由作者所作大量仿真计算,可看出以下几点:

1) 只要$\{a_k\}$的初始估计$\{a_k^{(0)}\}$选取适当,无论是第一重迭代还是第二重迭代,对 $1 \leqslant p < 2$,都是收敛的.

2) 从收敛域和迭代收敛速度来看,明显地有,p 愈接近 1,收敛域愈宽,但收敛速度愈慢,而 p 愈接近 2,则相反. 综合两者,作者倾向于取 $1.2 \leqslant p \leqslant 1.5$.

3) 自回归系数的估计精度,除依赖样本容量外,还依赖输入随机序列$\{x_k\}$的独立性,样本$\{x_k\}$的独立性愈好,估计精度愈高.

参 考 文 献

[1] Bednar, J. B., R. Yarlagadda and T. L. Watt, L_1 Deconvolution and Its Application to Seismic Signal Processing. IEEE Trans. ——ASSP, 34, 6, P1655.

[2] Wenyuan Xu, Marginal Bispectrum and Its Applications in Deconvolution to be published.

[3] 许文源、林元淡、贾沛璋,平稳非最小相位 $AR(p)$模型参数估计的非线性方程组,系统科学与数学,6,4,(1986),269—280.

[4] 许文源、贾沛璋、林元淡,平稳非最小相位 $AR(p)$的 L_1反褶积,系统科学与数学(英文版),2,(1988).

[5] Yarlagadda, R., J. B. Bednar and T. L. Watt, Fast Algorithms for l_p Deconvolution, IEEE Trans. ——ASSP, 33, 1, (1985), 174.

[6] Byrd, R. H. and D. A. Payne, Convergence of the Iteratively Reweighted Least Squares Algorithm for Robust Regression, The Johns Hopkins Univ., Baltimore, MD Tech. Rep., 313, (June, 1979).

L_p Deconvolution for Non—minimum Phase AR System

Jia Peizhang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica Beijing)

Abstract: In this paper we discuss a category of linear system: $y_n = h_n * X_n$, which is of $AR(q)$ model, its input $\{X_n\}$ is independent and identically distributed Stationary variables with zero expetation, its pulse response $\{h_n\}$ is of non—minimum phase. Now the deconvolution problem is how to estimate auto—regressive coeffieients $a_1, a_2, \cdots a_q$ of the system based on sample series $y_1, y_2, \cdots, y_n$ of output $\{Y_n\}$. The author presents $Lp(1<p<2)$ deconvolution method, the criterion of which is $\min \sum_{n=q+1}^{N} |\sum_{k=0}^{q} a_k y_{n-k}|^p$ under the constrain $\sum_{k=0}^{q} a_k h_{-k} = 1$. When initial estimates $\{h_{-k}^{(0)}\}\{0 \leqslant k \leqslant q\}$ of $\{h_{-k}\}$ are available this problem be solved iteratively via $\{h_{-k}^{(0)}\} \to \{a_k^{(1)}\} \to \{h_{-k}^{(1)}\} \to \cdots$. At the step from $\{h_{-k}^{(j)}\}$ to $\{a_k^{(j+1)}\}$ the Iteratively Reweighted Least Squares Algorithm is adopted to solve Lp optimal problem. Some simulated examples given in the paper show that the above iterative method is convergent, and the closer to 1 the p is, the wider the convergent range near $\{a_k\}$ will be, but making the converyence rate lower. The author thinks it suitable to choose $1.2 \leqslant p \leqslant 1.5$.

Key words: deconvolution; non—minimum phase; parameters estimate