第7卷 第3期
1990年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 7, No. 3
Sept., 1990

Kalman滤波理论的推广

陈建国 师自强
(西安飞机强度研究所)

王培德
(西北工业大学自控系，西安)

摘要 本文利用Hilbert空间几何理论将Kalman滤波理论进行了推广，在线性最小方差准则下，解决了状态噪声一步相关及状态噪声和测量噪声在同时刻和过去相邻时刻都相关情况的滤波，并给出了递推滤波公式.

关键词： Kalman滤波；Hilbert空间；线性最小方差

1. 前 言

Kalman, R. E. 和 Bucy, R. S. 在六十年代发展起来的Kalman滤波理论[1-3]是现代统计滤波理论的基础，并且使现代控制理论的实际应用成为可能. 但是，Kalman滤波理论是处理状态噪声和测量噪声都是白噪声，并且状态噪声和测量噪声互不相关情况的滤波，即对于系统[注1]

$$X(n+1)=A(n)X(n)+W(n), \tag{1}$$

$$Z(n)=H(n)X(n)+V(n), \tag{2}$$

Kalman滤波理论假设 $X(0)$, $W(n)$, $V(m)$ 互不相关，并且 $\{W(n)\}$ 和 $\{V(n)\}$ 都是白噪声. 这种假设在实际中难以满足. 因此，很多学者为Kalman滤波理论的实际应用作了不少工作，归纳起来不外乎是用成形滤波器白化处理和增加系统的维数. 遗憾的是白化处理要求 $\{W(n)\}$ 是平稳过程，并且谱密度是有理分式. 这常常难以满足. 另外，增加系统维数将大大增加计算工作量，给在线处理带来困难. 本文扬弃了白化处理和增加系统维数的方法，利用Hilbert空间几何理论，将Kalman滤波理论直接推广到状态噪声一步相关及状态噪声和测量噪声在同时刻和过去相邻时刻都相关情况的滤波，并在线性最小方差准则下给出了递推滤波公式.

2. 规定和引理

规定 1 随机变量 ξ_1, ξ_2 的内积定义为 $\langle\xi_1,\xi_2\rangle \triangleq E\{\xi_1\cdot\bar{\xi}_2\}$.

规定 2 $S_n \triangleq$ {由数1及 $Z(0), Z(1), \cdots, Z(n)$ 的各分量张成的Hilbert空间}[注2] (3)

规定 3 随机向量 $\xi(m)\in S_n$ 指 $\xi(m)$ 的各分量 $\xi(m)_j\in S_n$，并且 $\xi(m)$ 在 S_n 上的正交投影指 $\xi(m)$ 的各分量分别在 S_n 上的正交投影，即

$$P_{s_n}\xi(m)=P_{s_n}\begin{bmatrix}\xi(m)_1\\ \vdots\\ \xi(m)_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{s_n}\xi(m)_1\\ \vdots\\ P_{s_n}\xi(m)_q\end{bmatrix},$$

本文于1989年2月1日收到. 1990年2月2日收到修改稿.

其中 P_{s_n}为到 S_n 上的正交投影算子.

引理 1 $H(\xi(m))$表示由 $\xi(m)$各分量张成的 Hilbert 空间,S_n 由(3)定义,令

$$\xi(n)=Z(n)-P_{s_{n-1}}Z(n), \tag{4}$$

则{ξ(n)}满足下列条件

$$\xi(n)\perp S_{n-1}{}^{[注3]}, \tag{5}$$

$$S_n=S_{n-1}\oplus H(\xi(n))=S_0\oplus\sum_{j=1}^{n}H(\xi(j)), \tag{6}$$

其中 ⊕表示相互正交的 Hilbert 空间的线性和.

引理 2 正交投影算子 P_{sj}是线性算子,即

$$P_{sj}(\alpha\eta(n)+\beta\xi(n))=\alpha P_{sj}\eta(n)+\beta P_{sj}\xi(n).$$

引理 3 所有具有二阶矩的随机变量全体 H^*,按规定1定义内积成为 Hilbert 空间.

引理 4 设 H_1,H_2是 Hilbert 空间 H^*中的两个相互正交的子 Hilbert 空间,那么

$$P_{H_1\oplus H_2}=P_{H_1}+P_{H_2}.$$

引理2、4及引理1、3分别见文献[4,5].

在本文出现的随机变量都假定存在一阶矩和二阶矩. 所以,S_n 都是 H^*的子空间. 由 Hilbert 空间几何理论的正交投影定理,在 $Z(0),\dots,Z(m)$条件下,$X(n)$的线性最小方差估计 $\hat{X}(n|m)$正好是 $X(n)$在 S_m 上的正交投影. 即 $\hat{X}(n|m)=P_{s_m}X(n)$. 这一结论见文献[5].

引进记号

$$\hat{X}(n)=P_{s_n}X(n),\quad \hat{X}(n|n-1)=P_{s_{n-1}}X(n),$$

$$\tilde{X}(n)=X(n)-\hat{X}(n),\quad \tilde{X}(n|n-1)=X(n)-\hat{X}(n|n-1),$$

$$P(n)=E\{\tilde{X}(n)\tilde{X}(n)^T\},\quad P(n|n-1)=E\{\tilde{X}(n|n-1)\tilde{X}(n|n-1)^T\}.$$

3. 主要结论

对于系统(1)(2),假设

$$E\{W(n)\}=0,E\{W(n)W(n)^T\}=Q(n),\quad E\{W(n-1)W(n)^T\}=\Gamma(n-1), \tag{7}$$

$$E\{W(n)W(n+j)^T\}=0,\quad j=2,3,\cdots, \tag{8}$$

$$E\{V(n)\}=0,\quad E\{V(m)V(n)^T\}=R(n)\delta_{nm}, \tag{9}$$

$$E\{W(n-1)V(n)^T\}=G(n-1),\quad E\{W(n)V(n)^T\}=\Pi(n), \tag{10}$$

$$E\{W(n)V(n+j)^T\}=0,\quad j=2,3,\cdots,j=-1,-2,\cdots \tag{11}$$

$$E\{X(0)W(n)^T\}=0,\quad E\{X(0)V(n)^T\}=0, \tag{12}$$

其中 δ_{nm}是 Kronecker delta.

定　理 对于系统(1)(2),假设随机过程$\{X(n)\}$和$\{Z(n)\}$满足条件(7)—(12),并且 $R(n)$是正定的,则在线性最小方差准则下,由$\{Z(0),Z(1),\cdots,Z(n)\}$对 $X(n)$的滤波值 $\hat{X}(n)$满足下列递推滤波公式

$$\hat{X}(n)=\hat{X}(n|n-1)+K(n)(Z(n)-H(n)\hat{X}(n|n-1)), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\hat{X}(n|n-1)&=A(n-1)\hat{X}(n-1)\\&+K_1(n-1)(Z(n-1)-H(n-1)\hat{X}(n-1|n-2)),\end{aligned} \tag{14}$$

$$K(n)=(P(n|n-1)H(n)^T+G(n-1))R_1(n)^{-1}, \tag{15}$$

$$K_1(n-1)=(\Gamma(n-2)^T H(n-1)^T+\Pi(n-1))R_1(n-1)^{-1},$$

$$P(n)=(I-K(n)H(n))P(n|n-1)(I-K(n)H(n))^T+K(n)R(n)K(n)^T \tag{16}$$
$$-(I-K(n)H(n))G(n-1)K(n)^T-K(n)G(n-1)^T(I-K(n)H(n))^T,$$

$$P(n|n-1)=A(n-1)P(n-1)A(n-1)^T+Q(n-1) \tag{17}$$
$$+K_1(n-1)R_1(n-1)K_1(n-1)^T+D(n-1)+D(n-1)^T,$$

$$D(n-1)=A(n-1)(I-K(n-1)H(n-1))\Gamma(n-1)-A(n-1)K(n-1)\Pi(n-1)^T \tag{18}$$
$$-K_1(n-1)H(n-1)\Gamma(n-2)-K_1(n-1)\Pi(n-1)^T,$$

$$R_1(n-1)=H(n)P(n|n-1)H(n)^T+H(n)G(n-1)+G(n-1)^T H(n)^T+R(n).$$

证 由假设(7)—(12),引理及 S_n 的定义有 $\xi(n)\in S_n,\xi(n)\perp S_{n-1},V(n)\perp S_{n-1},W(n-1)\perp S_{n-2}$.

由 $\xi(n)$的定义及引理2,$\xi(n)$可表示成

$$\xi(n)\triangleq Z(n)-P_{s_{n-1}}Z(n)=Z(n)-P_{s_{n-1}}(H(n)X(n)+V(n))$$
$$=Z(n)-H(n)\hat{X}(n|n-1)=H(n)\tilde{X}(n|n-1)+V(n). \tag{19}$$

由假设(7)—(12)及 $V(n)\perp S_{n-1}$得出

$$E\{\tilde{X}(n|n-1)V(n)^T\}=E\{(A(n-1)X(n-1)+W(n-1)$$
$$-\hat{X}(n|n-1))V(n)^T\}=G(n-1). \tag{20}$$

由(19)及(20)有

$$R_1(n)\triangleq E\{\xi(n)\xi(n)^T\}=E\{(H(n)\tilde{X}(n|n-1)+V(n))(H(n)\tilde{X}(n|n-1)+V(n))^T\}$$
$$=H(n)P(n|n-1)H(n)^T+R(n)+H(n)G(n-1)+G(n-1)^T H(n)^T. \tag{21}$$

由投影定理[4]知

$$E\{\hat{X}(n|n-1)\hat{X}(n|n-1)^T\}=0. \tag{22}$$

所以,由(19)及(20)有

$$E\{X(n)\xi(n)^T\}=E\{(\tilde{X}(n|n-1)+\hat{X}(n|n-1))(H(n)\tilde{X}(n|n-1)+V(n))^T\}$$
$$=P(n|n-1)H(n)^T+G(n-1). \tag{23}$$

记 $P_{H(\xi(n))}X(n)=K(n)\xi(n)$,则

$$K(n)=E\{X(n)\xi(n)^T\}(E\{\xi(n)\xi(n)^T\})^{-1}=(P(n|n-1)H(n)^T+G(n-1))R_1(n)^{-1}. \tag{24}$$

求 $\hat{X}(n)$. 由引理及(19)有

$$\hat{X}(n)\triangleq P_{s_n}X(n)=P_{s_{n-1}\oplus H(\xi(n))}X(n)=P_{s_{n-1}}X(n)+P_{H(\xi(n))}X(n)$$
$$=\hat{X}(n|n-1)+K(n)(Z(n)-H(n)\hat{X}(n|n-1)). \tag{25}$$

从而(13)和(15)式得证. 根据假设(7)—(12)以及 $W(n-1)\perp S_{n-2}$,记 $P_{H(\xi(n-1))}W(n-1)=K_1(n-1)\xi(n-1)$,则有

$$K_1(n-1)=E\{W(n-1)\xi(n-1)^T\}(E\{\xi(n-1)\xi(n-1)^T\})^{-1}$$
$$=E\{W(n-1)(H(n-1)X(n-1)+V(n-1)-H(n-1)\hat{X}(n-1|n-2))^T\}R_1(n-1)^{-1}$$
$$=(\Gamma(n-2)^T H(n-1)^T+\Pi(n-1))R_1(n-1)^{-1}, \tag{26}$$

$$\hat{X}(n|n-1)\triangleq P_{s_{n-1}}X(n)=P_{s_{n-1}}(A(n-1)X(n-1)+W(n-1))$$
$$=A(n-1)\hat{X}(n-1)+K_1(n-1)(Z(n-1)-H(n-1)\hat{X}(n-1|n-2)). \tag{27}$$

上式利用了(19)及 $P_{s_{n-1}}W(n-1)=P_{H(\xi(n-1))}W(n-1)$. 所以(14)和(16)式得证.

现在来求 $P(n|n-1)$和 $P(n)$. 由(27)及(19)有

$$P(n|n-1) \triangleq E\{\tilde{X}(n|n-1)\tilde{X}(n|n-1)^T\} = E\{(A(n-1)\tilde{X}(n-1) + W(n-1) - K_1(n-1)\xi(n-1))(A(n-1)\tilde{X}(n-1) + W(n-1) - K_1(n-1)\xi(n-1))^T\}$$
$$= A(n-1)E\{\tilde{X}(n-1)\tilde{X}(n-1)^T\}A(n-1)^T + E\{W(n-1)W(n-1)^T\} + A(n-1)E\{\tilde{X}(n-1)W(n-1)^T\} + E\{W(n-1)\tilde{X}(n-1)^T\}A(n-1)^T$$
$$- A(n-1)E\{\tilde{X}(n-1)\xi(n-1)^T\}K_1(n-1)^T - K_1(n-1)E\{\xi(n-1)\tilde{X}(n-1)^T\}A(n-1)^T - E\{W(n-1)\xi(n-1)^T\}K_1(n-1)^T - K_1(n-1)E\{\xi(n-1)W(n-1)^T\}$$
$$+ K_1(n-1)E\{\xi(n-1)\xi(n-1)^T\}K_1(n-1)^T. \tag{28}$$

由(19)及(25)式有

$$P(n) \triangleq E\{\tilde{X}(n)\tilde{X}(n)^T\} = E\{(X(n) - \hat{X}(n))(X(n) - \hat{X}(n))^T\}$$
$$= E\{(\tilde{X}(n|n-1) - K(n)\xi(n))(\tilde{X}(n|n-1) - K(n)\xi(n))^T\}$$
$$= E\{\tilde{X}(n|n-1)\tilde{X}(n|n-1)^T\} + K(n)E\{\xi(n)\xi(n)^T\}K(n)^T$$
$$- E\{\tilde{X}(n|n-1)\xi(n)^T\}K(n)^T - K(n)E\{\xi(n)\tilde{X}(n|n-1)^T\}. \tag{29}$$

下面计算(28)和(29)式中出现的数学期望值.

由(19), $W(n-1)\perp S_{n-2}$及假设(7)—(12)有

$$E\{\xi(n-1)W(n-1)^T\} = E\{(H(n-1)X(n-1) + V(n-1) - H(n-1)\cdot\hat{X}(n-1|n-2))W(n-1)^T\} = H(n-1)\Gamma(n-2) + \Pi(n-1)^T. \tag{30}$$

由假设(7)—(12)及 $W(n-1)\perp S_{n-2}$,并利用(30)有

$$E\{\tilde{X}(n-1)W(n-1)^T\} = E\{(X(n-1) - P_{S_{n-2}\oplus H(\xi(n-1))}X(n-1)\ W(n-1)^T\}$$
$$= E\{X(n-1)W(n-1)^T\} - E\{P_{H(\xi(n-1))}X(n-1)W(n-1)^T\}$$
$$= \Gamma(n-2) - K(n-1)\ (H(n-1)\Gamma(n-2) + \Pi(n-1)^T)$$
$$= (I - K(n-1)H(n-1))\Gamma(n-2) - K(n-1)\Pi(n-1)^T. \tag{31}$$

利用(21)及(23)式有

$$E\{\tilde{X}(n-1)\xi(n-1)^T\} = E\{(X(n-1) - P_{S_{n-2}}X(n-1) - P_{H(\xi(n-1))}X(n-1))\xi(n-1)^T\}$$
$$= E\{X(n-1)\xi(n-1)^T\} - K(n-1)E\{\xi(n-1)\xi(n-1)^T\} = 0. \tag{32}$$

将(30),(31),(32)代入(28)式,化简便得(18)式.

由(23)及 $\xi(n)\perp S_{n-1}$有

$$E\{\tilde{X}(n|n-1)\xi(n)^T\} = E\{(X(n) - \hat{X}(n|n-1))\xi(n)^T\}$$
$$= P(n|n-1)H(n)^T + G(n-1). \tag{33}$$

将(33)及(21)代入(29)式,化简便得(17)式.

定理证毕.

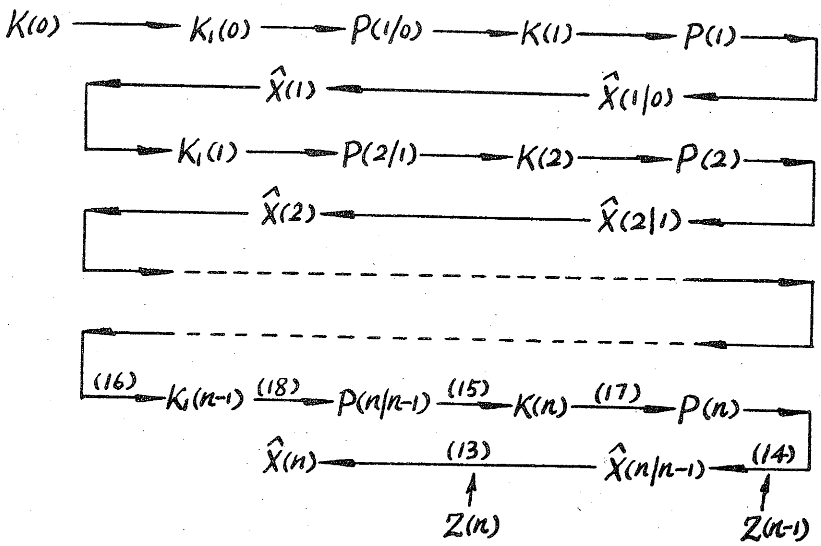
应用本文的递推滤波公式时,首先给定初始值 $\hat{X}(0)$, $\hat{X}(0|-1)$, $P(0)$, $P(0|-1)$,然后按下列顺序递推计算 $\hat{X}(n|n-1)$和 $\hat{X}(n)$(见下页).

给定初态值的另一种方式,跟 Kalman 滤波一样,只给定 $\hat{X}(0|-1)$和 $P(0|-1)$,再用 Kalman 滤波递推公式求出 $\hat{X}(0)$和 $P(0)$,然后按本文的递推滤波公式计算 $\hat{X}(n|n-1)$和 $\hat{X}(n)$.

注 1 $\{W(n)\}$和$\{X(n)\}$是 p 维随机过程,$\{Z(n)\}$和$\{V(n)\}$是 q 维随机过程. $A(n)$和 $H(n)$分别是 $p\times p$ 和 $q\times p$ 矩阵. $\{W(n)\}$和$\{V(n)\}$分别是状态噪声过程和测量噪声过程.

注 2 这里涉及的极限是均方极限.

注 3 $\xi(n)\perp S_{n-1}$指 $\xi(n)$的各分量 $\xi(n)_i\perp S_{n-1}$.



参考文献

[1] kalman, R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem, Trans. ASME, Ser, D: J. Basic. Eng., 82, (1960), 35—45.

[2] kalman, R.E., Bucy, R. S., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, Ser. D: J. Basic. Eng., 83, (1961), 95—108.

[3] Kalman, R. E., New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. Symp. Eng. Appl., Random Functions Theory and probability (eds, J. L. Bogdanoff and F. Kozin), John Wiley & Sons. In., New York, (1963).

[4] 夏道行等，实变函数论与泛函分析，下册，人民教育出版社，北京，(1979).

[5] 复旦大学，概率论，第三册，随机过程，人民教育出版社，北京，(1982).

A Generalization of Kalman Filtering Theory

Chen Jianguo, Shi Ziqiang

(Xian Aircraft Strength Research Institute)

Wang Peide

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract: In this paper, by means of Hilbert space geometry theory, Kalman filter theory is generalized to the case that the system noise Correlates itself in one—step and system Correlates with the measuring noise at the present step as wall as one past step. The recursive filtering formulas with linear minimun variance are derived.

Key words: kalman filter; Hilbert space; linear minimun variance