第8卷 第1期
1991年3月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 8, No. 1
Mar., 1991

有终端约束的调节器问题的某些渐近性质

陈叔平
(浙江大学数学系,杭州)

摘要: 本文研究有终端约束的调节器问题,刻划了最优轨线在终端附近的性态;给出了由此导出的反馈控制律所构成的闭环系统的特征值的渐近分布;并讨论了闭环系统的增益裕度、相位裕度和时滞容限等性质.

关键词: 调节器;终端约束;反馈镇定;谱分布;时滞容限

1 引 言

考虑有终端约束的线性二次最优控制问题:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \tag{1.2}$$

$$\| u \|_u = \min. \tag{1.3}$$

其中 $x(t)$ 和 $u(t)$ 分别是 n 维状态向量和 r 维控制输入;$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$;容许控制类是 $\mathscr{U} = L_2(0,T;R^r)$, T 是给定的正数. 研究此问题的背景及意义在 Lukes(1968)、Kleinman(1970)、Russell(1975)和 Seidman(1988)等人的工作中已有说明. 他们的结果可总结如下.

定理 1.1 问题(1.1)—(1.3)对所有初值 $x_0 \in R^n$ 有解的充要条件是 (A,B) 完全能控. 此条件满足时最优解存在唯一. 最优控制和最优轨线可分别表示为

$$\hat{u}(t) = - B' e^{-A't} Q^{-1}(T) x_0, \tag{1.4}$$

$$\hat{x}(t) = Q(T-t) e^{-A't} Q^{-1}(T) x_0. \tag{1.5}$$

其中"$'$"表示矩阵的转置运算,而

$$Q(t) = \int_0^t e^{-As} BB' e^{-A's} \mathrm{d}s. \tag{1.6}$$

进而,(1.4)给出的开环解还可表为状态反馈形式

$$\hat{u}(t) = - B' Q^{-1}(T-t) \hat{x}(t). \tag{1.7}$$

定理 1.2 对每个 $t \in (0,T]$,

$$u(\tau) = - B' Q^{-1}(t) x(\tau) \tag{1.8}$$

都给出了系统(1.1)的反馈镇定律,或等价地,

$$W(t) = A - BB' Q^{-1}(t) \tag{1.9}$$

的特征值全部位于开的左半复平面内.

正如 Kleinman 用其文章标题所指出的,定理 1.2 提供了镇定一个线性定常系统的方便的途径. (1.8)构成的闭环系统依赖于参数 t. 为了研究其性质,Russell 对单输入情形给

本文于1989年4月12日收到. 1989年10月12日收到修改稿.

出了矩阵 $W(t)$ 的谱分布在 $t\to 0$ 时的渐近表达式，并指出对一般的多输入情形这一结果的推广尚未解决．此外，Seidman 给出了算子 $C_T: R^n\to\mathscr{U}$，

$$(C_Tx)(t) = -B' e^{A't}Q^{-1}(T)x,\ x\in R^n \tag{1.10}$$

的范数在 $T\to 0$ 时的渐近估计．这一结果刻划了将非零状态用时间 T 控制到 0 所需的最小能量．同时，由线性系统的对偶原理，它也可用于分析系统 $\dot{z}=-A'z,\quad y=B'z$ 由输出来估计状态时对量测误差的敏感程度．

本文目的是：1）研究在终端附近最优轨线以何种方式趋于零；2）将 Russell 的结果推广到一般多输入情形；3）进一步讨论闭环系统的增益裕度、相位裕度和时滞容限等性质．

2　预备知识

本文始终假定 (A,B) 是能控的且 $\operatorname{rank} B=r$．定义

$$k = \min\{j\geqslant 0, \operatorname{rank}[B\ AB\cdots A^jB] = n\}. \tag{2.1}$$

k 称为 (A,B) 的能控性指标．易见 $0\leqslant k\leqslant n-1$．再令

$$\mathscr{B}_0 = \operatorname{Im}B,\quad \mathscr{B}_{j+1} = \mathscr{B}_j + A\mathscr{B}_j,\quad j\geqslant 1. \tag{2.2}$$

其中 $\operatorname{Im}B$ 表示 B 的值域，$A\mathscr{B}_j$ 是 $\mathscr{B}_j$ 经 A 映射的像，$\mathscr{B}_j+A\mathscr{B}_j$ 为通常意义下子空间的线性和．易见

$$\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}_1\subset\cdots\subset\mathscr{B}_k = R^n. \tag{2.3}$$

记 $E_0=\mathscr{B}_0$，并令 $E_j=\mathscr{B}_{j-1}^{\perp}\cap\mathscr{B}_j$ 为 $\mathscr{B}_{j-1}$ 在 $\mathscr{B}_j$ 中的正交补，则状态空间有正交直接和分解 $R^n=\bigoplus_{j=0}^{k}E_j$．定义 $d_j=\dim E_j$，易验证 $r=d_0\geqslant d_1\geqslant\cdots\geqslant d_k\geqslant 1$．再定义 n_i＝数组 $\{d_0,d_1,\cdots d_k\}$ 中不小于 i 的整数的个数．则有 $k+1=n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_r\geqslant 1$，$\sum_{i=1}^{r}n_i=\sum_{j=0}^{k}d_j=n$．$\{n_i\}$ 通常称为 (A,B) 的能控性结构指数．$\{n_i\}$ 和 $\{d_j\}$ 通常称为 (A,B) 的能控性结构指数．$\{n_i\}$ 和 $\{d_j\}$ 能相互唯一确定．这两组数及(2.1)定义的 k 作为专用记号在后面将多次用到．它们都由 (A,B) 唯一确定并且是系统在基变换和状态反馈下的不变量．在不致引起混淆时，我们将不具体指明它们对 (A,B) 的依赖关系．我们要用到以下结果．

引理 2.1　设 (A,B) 完全能控．则存在 $F\in R^{r\times n}$ 及非奇异矩阵 $S\in R^{n\times n}$、$G\in R^{r\times r}$，使得

$$S^{-1}(A+BF)S \overset{\text{def}}{=} \widetilde{A} = \operatorname{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_r), \tag{2.4}$$

$$S^{-1}BG = \operatorname{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_r) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{B}. \tag{2.5}$$

其中 $A_i\in R^{n_i\times n_i}$ 和 $b_i\in R^{n_i}$ 分别具有以下形状：

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix},\quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

本节上述内容可参见 Wonham(1979)第 5 章．

对给定的 (A,B) 我们引入正交矩阵集合

$$\mathscr{E}(A,B) = \left\{\begin{array}{l} E=[E_0\quad E_1\cdots E_k]\in R^{n\times n};\quad E_j \text{ 由 } E_j \text{ 的} \\ \text{就范正交基为列向量构成} \end{array}\right\}. \tag{2.7}$$

易验证，任取 $E\in\mathscr{E}(A,B)$，我们有

$$\mathscr{E}(A,B)=\left\{EU;U=\mathrm{diag}(U_0,U_1,\cdots,U_k);\quad U_j\text{ 是 }d_j\times d_j\text{ 正交矩阵}\right\}. \tag{2.8}$$

此外，对 $E=[E_0\quad E_1\quad E_2\cdots E_k]\in\mathscr{E}(A,B)$，可验证

$$E_j' A^l B=0,\quad \forall\ j>l,\qquad \text{而 } E_j' A^j B\neq 0, \tag{2.9}$$

$$E_i' AE_j=0,\quad \forall\ i>j+1. \tag{2.10}$$

现在设 $F\in R^{r\times n}$，$S\in R^{n\times n}$，$G\in R^{r\times r}$ 且 S 和 G 是非奇异的. 则不难验证

$$E\in\mathscr{E}(A,B)\Leftrightarrow E\in\mathscr{E}(A+BF,BG), \tag{2.11}$$

$$E\in\mathscr{E}(A,B)\Leftrightarrow S^{-1}EL\in\mathscr{E}(S^{-1}AS,S^{-1}B). \tag{2.12}$$

(2.12)中 L 是某个非奇异的分块上三角阵，其第 j 个顺序主子块 $L_{jj}\in R^{d_j\times d_j}$，$0\leqslant j\leqslant k$.

为表述方便，再约定以下记号. I_p 表 p 阶单位阵，$0_{p\times q}$ 表 $p\times q$ 阶零矩阵. 对 $p\leqslant q$，定义 $I(p,q)=[0_{p\times(q-p)}\quad I_p]$，而当 $p>q$ 时定义 $I(p,q)=I'(q,p)$. $H(p,q)$ 用来记 $p\times q$ 阶 Hilbert 矩阵

$$H(p,q)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{p+q-1} & \dfrac{1}{p+q-2} & \cdots & \dfrac{1}{p}\\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{1}{q} & \dfrac{1}{q-1} & \cdots & 1\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

我们还将用 $O(t)$ 来表示满足 $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\,\|O(t)\|/t<\infty$ 的某个矩阵或数量. 其维数一般能由上下文看出.

3　最优轨线在终端附近的性态及 $W(t)$ 的特征值的渐近表示

引理 3.1　给定 (A,B) 并设 $Q(t)$ 由(1.6)给出. 任取 $E=[E_0\quad E_1\cdots E_k]\in\mathscr{E}(A,B)$，我们有

$$E'Q(t)E=tD(t)[H+O(t)]D(t). \tag{3.1}$$

其中 $D(t)$ 和 H 是如下的分块矩阵：

$$D(t)=\mathrm{diag}\left(I_{d_0},-tI_{d_1},\frac{(-t)^2}{2!}I_{d_2},\cdots,\frac{(-t)^k}{k!}I_{d_k}\right), \tag{3.2}$$

$$H=\left[\frac{E_i' A^i BB' A'^j E_j}{i+j+1}\right]_{i,j=0}^{k}, \tag{3.3}$$

并且 H 是正定矩阵.

证　利用(2.9)我们可以算出

$$\begin{aligned}E'Q(t)E&=\left[\int_0^t E_i' e^{-As}BB' e^{-A's}E_j\,ds\right]_{i,j=0}^{k}\\&=\left[\int_0^t\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{(-s)^{p+q}}{p!q!}E_i' A^pBB' A'^qE_j\,ds\right]_{i,j=0}^{k}\\&=\left[\int_0^t\frac{(-s)^{i+j}}{i!j!}(E_i' A^iBB' A'^jE_j+O(s))\,ds\right]_{i,j=0}^{k}\\&=t\left[\frac{(-t)^{i+j}}{i!j!}\left(\frac{E_i' A^iBB' A'^jE_j}{i+j+1}+O(t)\right)\right]_{i,j=0}^{k}\end{aligned}$$

$$= tD(t)[H + O(t)]D(t). \tag{3.4}$$

为证 H 的正定性，取 $x\in R^n$，写 $x' = (x_0' \ x_1' \cdots x_k')$，$x_j\in R^{d_j}$，则可算出

$$x' Hx = \int_0^1 \| \sum_{j=0}^{k} B' A'^j E_j x_j \sigma^j \|^2 d\sigma \geqslant 0. \tag{3.5}$$

于是 $x' Hx=0$ 当且仅当 $B' A'^j E_j x_j=0$. $\forall\ 0\leqslant j\leqslant k$. 但 $E_j x_j\in \mathscr{E}_j\subset I_m A^j B$，故 $B' A'^j E_j x_j=0$ 等价于 $x_j=0$. 这就证明了 H 是正定的. 引理证毕.

利用引理 3.1 我们可将最优轨线(1.5)写成

$$\hat{x}(t) = (T-t)ED(T-t)[H+O(T-t)]D(T-t)E' e^{-A' t}Q^{-1}(T)x_0, \tag{3.9}$$

由此便可刻划最优轨线在终端附近的性态：

定理 3.2 存在状态空间的一个直接和分解

$$R^n = \mathscr{X}_0 \oplus \mathscr{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{X}_k, \tag{3.10}$$

使得当初值 $x_0\in\mathscr{X}_j$ 时，问题(1.1)—(1.3)的最优轨线 $\hat{x}(t,x_0)$ 在 $t\to T$ 时以 $(T-t)^{j+1}$ 的速度趋于零，子空间的个数及各自的维数 $\dim\mathscr{X}_j=d_j$ 只依赖于(A,B)的能控性结构指数.

设 C_T 由(1.10)定义，则有 $\|C_T\|^2=x' Q^{-1}(T)x$，$x\in R^n$. 应用引理 3.1 并注意到 $[H+O(T)]^{-1}=H^{-1}+O(T)$ 就可算出

$$T^{2k+1}\|C_T x\|^2 \leqslant [\lambda_{\max}(H^{-1}) + O(T)]\|T^k D^{-1}(T)E' x\|^2. \tag{3.11}$$

其中 $\lambda_{\max}(H^{-1})$ 表 H^{-1} 的最大特征值. 当 $T\ll 1$ 时 $\|T^k D^{-1}(T)E' x\|\leqslant k!\ \|x\|$. 因此由(3.11)可立即导出 Seidman 的估计：

定理 3.3 当 $T\to 0$ 时有 $\|C_T\|\sim[\lambda_{\max}(H^{-1})+O(T)]k!\ T^{-k-\frac{1}{2}}$.

为刻划 $W(t)$ 的特征值，我们给出

引理 3.4 设 $W(t)$ 由(1.9)给出，$E\in\mathscr{E}(A,B)$，则有

$$D^{-1}(t)E^{-1}W(t)ED(t) = \frac{1}{t}[\Lambda + O(t)], \quad t\to 0. \tag{3.12}$$

$$\Lambda = -[J + MH^{-1}]. \tag{3.13}$$

其中 $D(t)$ 和 H 分别由(3.2)、(3.3)给出，而

$$J = [\delta_{i,j+1}E_i' AE_j]_{i,j=0}^k, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i\neq j, \\ 1, i=j, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$M = E' BB' E = \mathrm{diag}(E_0' BB' E_0, 0, \cdots, 0). \tag{3.15}$$

我们称(3.13)定义的 Λ 为 $W(t)$ 在 $t\to 0$ 时的主部. 在导出 Λ 的过程(3.12)中，$D(t)$ 由(A,B)的能控性结构指数唯一确定，而 $\mathscr{E}\in \mathrm{E}(A,B)$ 有一定的随意性. 但由(2.8)知，取定 $E\in\mathscr{E}(A,B)$后，任一 $\tilde{E}\in\mathscr{E}(A,B)$)均可表为 $\tilde{E}=EU$，而 U 和 $D(t)$ 可交换. 因此取不同的 E 导出的主部都是相似的. 鉴于我们只涉及 Λ 的特征结构. 故可记 $\Lambda=\Lambda(A,B)$ 而不致引起误解. 下面的结果表明 $W(t)$ 的主部可以有一种标准结构.

引理 3.5 设 $F\in R^{r\times n}$、$S\in R^{n\times n}$、$G\in R^{r\times r}$，S 和 G 非奇异，使得 $\tilde{A}=S^{-1}(A+BF)S$、$\tilde{B}=S^{-1}BG$ 具有(2.4)—(2.6)的形状. 那末 $\Lambda(A,B)$ 和 $\Lambda(\tilde{A},\tilde{B})$ 相似.

证 我们先建立 $\Lambda(A,B)$ 与 $\Lambda(\tilde{A},\tilde{B}G^{-1})$ 的相似关系，为此令 $A^{(1)}=A+BF$，$B^{(1)}=B$，$A^{(2)}=S^{-1}(A+BF)S=\tilde{A}$，$B^{(2)}=S^{-1}B=\tilde{B}G^{-1}$. 在(1.9)右端用$(A^{(i)},B^{(i)})$代替$(A,B)$然后把得到的矩阵记为 $W_i(t)$，$i=1,2$. 易见$(A^{(i)},B^{(i)})$和(A,B)有相同的能控性结构指数. 取 $E\in\mathscr{E}$

(A,B)，则 $E\in\mathscr{E}(A^{(1)},B^{(1)})$. 且存在非奇异的分块上三角矩阵

$$L=\begin{bmatrix} L_{00} & L_{01} & \cdots & L_{0k} \\ 0 & L_{11} & \cdots & L_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & L_{kk}\end{bmatrix},\quad L_{jj}\in R^{d_j\times d_j}, \tag{3.16}$$

使得 $S^{-1}EL\in\mathscr{E}(A^{(2)},B^{(2)})$. 利用(2.9)、(2.10)可直接算出

$$D^{-1}(t)E^{-1}W_1(t)ED(t)=\frac{1}{t}[\Lambda(A,B)+O(t)], \tag{3.16}$$

$$D^{-1}(t)L^{-1}E^{-1}SW_2(t)S^{-1}ELD(t)=\frac{1}{t}[\bar{L}^{-1}\Lambda(A,B)\bar{L}+O(t)], \tag{3.17}$$

其中 $\bar{L}=\mathrm{diag}(L_{00},L_{11},\cdots,L_{kk})$. 这就证明了 $\Lambda(A,B)$ 与 $\Lambda(\tilde{A},\tilde{B}G^{-1})$ 相似. 往证 $\Lambda(\tilde{A},\tilde{B}G^{-1})$ 与 $\Lambda(\tilde{A},\tilde{B})$ 相似. 取 $\tilde{A}^j\tilde{B}$ 的前 d_j 列作为 E_j. 则可验证 $E=[E_0\quad E_1\cdots E_k]\in\mathscr{E}(\tilde{A},\tilde{B})=\mathscr{E}(\tilde{A},\tilde{B}G^{-1})$. 此外不难看出存在置换阵 P，使得 $ED(t)P=\tilde{D}(t)=\mathrm{diag}(\tilde{D}_1(t),\cdots,\tilde{D}_r(t))$，这里 $\tilde{D}_i(t)=\mathrm{diag}\left(\frac{(-t)^{n_i-1}}{(n_i-1)!},\cdots,-t,1\right)\in R^{n_i\times n_i}$. 于是可算出

$$\begin{aligned} &D^{-1}(t)E^{-1}[\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{B}'\left(\int_0^t e^{-\tilde{A}s}\tilde{B}\tilde{B}'e^{-\tilde{A}'s}\mathrm{d}s\right)^{-1}]ED(t)\\ &=\frac{1}{t}P[-\tilde{J}-\tilde{M}\tilde{H}^{-1}]P^{-1}=\frac{1}{t}\Lambda(\tilde{A},\tilde{B}), \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &D^{-1}(t)E^{-1}[\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{G}\tilde{G}'\tilde{B}'\left(\int_0^t e^{-\tilde{A}s}\tilde{B}\tilde{G}\tilde{G}'\tilde{B}'e^{-\tilde{A}'s}\mathrm{d}s\right)^{-1}ED(t)\\ &=\frac{1}{t}P[-\tilde{J}-\tilde{M}_G\tilde{H}_G{}^{-1}]P^{-1}=\frac{1}{t}\Lambda(\tilde{A},\tilde{B}G^{-1}). \end{aligned} \tag{3.19}$$

其中

$$\tilde{J}=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_r), \tag{3.20}$$

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & n_{i-1} & & 0 \\ & 0 & n_{i-2} & \\ & & \ddots & \ddots\ 1 \\ 0 & & & \ddots\ 0\end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\tilde{M}=\mathrm{diag}(b_1b_1',b_2b_2',\cdots,b_rb_r'),\quad \tilde{M}_G=[\alpha_{ij}b_ib_j']_{i,j=1}^r, \tag{3.22}$$

$$\tilde{H}=\mathrm{diag}(H_{11},H_{22},\cdots,H_{rr}),\quad \tilde{H}_G=[\alpha_{ij}H_{ij}]_{i,j=1}^r. \tag{3.23}$$

$H_{ij}=H(n_i,n_j)$ 是第二节引入的 Hilbert 矩阵，α_{ij} 是正定矩阵 $\tilde{G}\tilde{G}'$ 第 i 行第 j 列元素，$\tilde{G}=G^{-1}$.

由(3.18)、(3.19)看出，为了得到引理的结论，只需证明 $\tilde{J}+\tilde{M}\tilde{H}^{-1}$ 和 $\tilde{J}+\tilde{M}_G\tilde{H}_G^{-1}$ 的相似性. 为此我们构造

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix} I_{n_1} & -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}I_{12} & \cdots & -\frac{\alpha_{1r}}{\alpha_{11}}I_{1r} \\ 0 & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{n_r}\end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

其中 $I_{ij}=I(n_i,n_j)$ 是第 2 节引入的记号. 不难验证当 $i\geqslant l\geqslant j$ 时有 $H_{il}I_{lj}=H_{ij}$，$b_ib_l'I_{lj}=b_ib_j'$.

以及 $I_{ji}J_i=J_jI_{ji}$. 于是(注意到 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_r$),我们可算出

$$\tilde{L}'[\tilde{J}+\tilde{M}_G\tilde{H}_G^{-1}]\tilde{L}'^{-1}=J+(\tilde{L}'\tilde{M}_G\tilde{L})(\tilde{L}'\tilde{H}_G\tilde{L})^{-1}. \tag{3.25}$$

而 $\tilde{L}'\tilde{M}_G\tilde{L}=\mathrm{diag}(\alpha_{11}b_1b_1',\tilde{M}_G^{(1)})$, $\tilde{L}'\tilde{H}_G\tilde{L}=\mathrm{diag}(\alpha_{11}H_{11},\tilde{H}_G^{(1)})$. $\tilde{M}_G^{(1)}$ 和 $\tilde{H}_G^{(1)}$ 是如下的分块矩阵:

$$\tilde{M}_G^{(1)}=[\alpha_{ij}^{(1)}b_ib_j']_{i,j=2}^r,\quad \tilde{H}_G^{(1)}=[\alpha_{ij}^{(1)}H_{ij}]_{i,j=2}^r, \tag{3.26}$$

$$\alpha_{ij}^{(1)}=\alpha_{ij}-\frac{\alpha_{1i}\alpha_{ij}}{\alpha_{11}}=\alpha_{ji}^{(1)}. \tag{3.27}$$

由于 $\tilde{G}\tilde{G}'$ 是正定的,故上述步骤可以明显的方式逐次施行. 最后就可将 $\tilde{J}+\tilde{M}_G\tilde{H}_G^{-1}$ 相似变换成 $\tilde{J}+\tilde{M}\tilde{H}^{-1}$. 引理于是得证.

对形如(2.6)的 (A_i,b_i), Russell 已经算出(记 $N=n_i$)

$$\det(\lambda I-A(A_i,b_i))=\lambda^N+\sum_{l=0}^{N-1}\frac{N(2N-1-l)!}{l!(N-l)!}\lambda^l\overset{\text{def}}{=}f_N(\lambda). \tag{3.28}$$

并且对所有的 N, (3.28)定义的多项式均无重根. 于是 $A(\tilde{A},\tilde{B})$, 从而 $A(A,B)$, 的特征值的几何重数均为 1. 因此我们可应用特征值摄动的标准结果(例如见 Kato(1976))从引理 3.4 和引理 3.5 得到

定理 3.6　当 $t\to0$ 时 $W(t)$ 的特征值 $\{\lambda_j(t)\}$ 有渐近表示

$$\lambda_j(t)=\frac{1}{t}\bar{\lambda}_j+O(1),\qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{3.29}$$

其中 $\{\bar{\lambda}_j;1\leqslant j\leqslant n\}$ 是 n 次多项式

$$f(\lambda;A,B)=\prod_{j=1}^{k+1}[f_j(\lambda)]^{\gamma_j} \tag{3.30}$$

的零点. (3.30)中的因子 $f_j(\lambda)$ 由(3.28)定义, $\gamma_j\overset{\text{def}}{=}d_{j-1}-d_j$, $1\leqslant j\leqslant k+1$ 是 (A,B) 的 Kronecker 指数. (d_{k+1} 约定为 0).

4　反馈控制律(1.8)的其它性质

$(A+\alpha I,B)$ 与 (A,B) 有相同的能控性. 因此将定理 1.2 的结论用于 $(A+\alpha I,B)$ 就有

定理 4.1　设 (A,B) 能控. 任给 $\alpha>0$、$t>0$, 令 $Q_\alpha(t)=\int_0^t e^{-2\alpha s}e^{-As}BB'e^{-A's}ds$. 反馈控制律

$$u(\tau)=-B'Q_\alpha^{-1}(t)x(\tau) \tag{4.1}$$

都能镇定系统(1.1), 且使之具有不少于 α 的稳定度, 即 $W_\alpha(t)=A-BB'Q_\alpha^{-1}(t)+\alpha I$ 是 Hurwitz 矩阵.

定理 4.2　设 (A,B) 能控. 对任何固定的 $t>0$ 及 $K\in R^{r\times r}$, 若 $K+K'$ 的特征值都大于 1, 则矩阵

$$W_k(t)=A-BKB'Q^{-1}(t) \tag{4.2}$$

是 Hurwitz 的.

证　易见 (A,B) 能控保证了 $Q(t)$ 正定. 用 $V(x)=x'Q(t)x$ 作为 Lyapunov 函数并循通常的推理即可证明定理结论.

若 $K=\beta I$ 则条件 $K+K'>I$ 等价于 $\beta>\frac{1}{2}$. 这时定理4.2就意味着反馈律(1.8)有无穷大增益裕度.

最后我们来讨论反馈律(1.8)的时滞容限问题. 我们的目标是在给定 $t>0$ 的情形下估计出 τ 的容许范围,使反馈环节中存在时滞 τ 时系统仍保持稳定. 熟知

$$\frac{dx(s)}{ds}=Ax(s)-BB'Q^{-1}(t)x(s-\tau) \tag{4.3}$$

是渐近稳定的当且仅当相应的特征方程

$$\det[\lambda I-A+e^{-\lambda\tau}BB'Q^{-1}(t)]=0 \tag{4.4}$$

的所有根均具有负实部. 仿照(3.12)的推导过程我们易证,当 $t>0$ 充分小时,(4.4)等价于

$$\det[\lambda I+\frac{1}{t}(J+e^{-\lambda\tau}MH^{-1}+O(t))]=0. \tag{4.5}$$

其中 H,J 和 M 分别由(3.3)、(3.14)和(3.15)给出. 令 $\mu=\lambda t,\eta=\tau/t$,则(4.5)又可写成

$$\det[\mu I+J+e^{-\mu\eta}MH^{-1}+O(t)]=0. \tag{4.6}$$

先考察 μ 的函数(η 为参数)

$$F(\mu;\eta)=\det[\mu I+J+e^{-\mu\eta}MH^{-1}], \tag{4.7}$$

利用引理3.5的结果我们看到上式中的 J、M 和 H 可用(3.20)、(3.22)和(3.23)给出的 $\tilde{J}$、$\tilde{M}$ 和 $\tilde{H}$ 来代替而保持 $F(\mu;\eta)$ 不变. 从而算出

$$F(\mu;\eta)=\prod_{j=1}^{k+1}[\varphi_j(\mu,\eta)]^{\gamma_j}e^{-\mu\eta}, \tag{4.8}$$

$$\varphi_j(\mu;\eta)=e^{\mu\eta}\mu^j+\sum_{l=0}^{j-1}\frac{j(2j-1-l)!}{l!(j-l)!}\mu^l. \tag{4.9}$$

其中 $\{\gamma_j;1\leqslant j\leqslant k+1\}$ 是 (A,B) 的 Kronecker 指数.

易见 $\varphi_j(\mu;0)$ 是 Hurwitz 多项式: $\varphi_j(0,\eta)>0$, 而 $\varphi_j(i\omega,\eta)=0$ 当且仅当 $\varphi_j(-i\omega,\eta)=0$. 此外,不难证明当 $\varphi_j(i\omega,\eta)=0,\omega>0,\eta>0$ 时必有 $\omega\eta\geqslant\frac{\pi}{3}$. 并且这样的正数 (ω,η) 不超过 j 对,记为 $\{\omega_l^{(j)},\eta_l^{(j)});1\leqslant l\leqslant N_j,N_j\leqslant j$. 这一性质可解释为反馈律(1.8)有不小于 $\frac{\pi}{3}$ 的相位裕度. 其证明类似于 Anderson 和 Moore(1971)第5章. 现在定义 $\omega^*=\max\{\omega_l^{(j)};1\leqslant l\leqslant N_j,1\leqslant j\leqslant k+1\}$, 然后令 $\eta^*=\frac{\pi}{3\omega^*}$. 那末当 $0\leqslant\eta<\eta^*$ 时, $F(\mu;\eta)=0$ 的根均具有负实部. 综上讨论我们就得到了

定理 5.3　对充分小的 t,存在 $0<\eta_t<\eta^*$,使得时滞系统(5.3)对 $\tau\in[0,t\eta_t]$ 是渐近稳定的.

定理3.6和定理5.3表明, t 越小,反馈律(1.8)确定的闭环系统的稳定性就越好,但对时滞的容限会相应地变小. 这也是反馈镇定设计中通常需要兼顾的问题.

参 考 文 献

[1] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B.. Linear Optimal Control. Prentice—Hall, 1971, Chapter 5

[2] Kleinman, D.. An Easy Way to Stabilize a Linear Constant System. IEEE Trans., Auto. Contr., 1970, AC—15:692

[3] Lukes, D. L.. Stabilizability and Optimal Control. Funk. EK Vac., 1968, 11:39—50

[4] Russell, D. L.. A Singular Point Problem Arising in Control Theory. Inter. Conf. Diff. Eqs., Academic Press Inc., 1975, 674—697

[5] Seidman, T. I.. How Violent are Fast Control. Mathematics of Control Signals and Systems, 1988, 1(1)
[6] Wonham, W. M.. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Springer—Verlag, 1979, Chapter 5
[7] Kato, T.. Perturbation Theory for Linear Operators, 2nd ed. Springer—Verlag, 1976, Chapter 2

Some Asymptotical Properties of Regulator Problems with Terminal Constraints

Chen Shuping
(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract: This paper concerns with a regulator problem with terminal constraints. The behavior of the optimal trajectory near the terminal time is characterized. An asymptotical formula for the eigenvalues of the closed—loop system is obtained. Other properties of the feedback law, such as the gain margin, phase margin and time delay tolerance are also discussed

Key words: regulator; terminal constraints; feedback stabilizing; spectral distribution; time delay tolerance

征 文 启 事

经中国自动化学会控制理论专业委员会商定，1991年全国控制理论及其应用年会拟于1991年11月在山东威海(或烟台)举行，现将有关征文事宜通知如下：

一、截止时间：凡投年会稿件，务请于1991年4月30日前寄北京中国科学院系统科学所张国蓉同志处(邮政编码100080).

二、征文范围：凡涉及控制理论及其应用的理论性文章和应用性文章均可投稿，特别欢迎那些立意新颖、富有创建性的理论性文章和应用效果较好或对实际应用有较强指导意义的应用性文章，以便不断提高会议论文的质量. 欢迎边缘地区的控制系统工作者踊跃投稿.

三、为了使会议代表具有广泛性，请每位作者仅投一篇稿，请一式一份寄出，投稿尽量控制在5000字以内.

四、请作者自留底稿，不退稿，凡录用的稿件于1991年6月15日以前发出录取通知书.

中国自动化学会控制理论专业委员会
1990年12月5日