不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计*

俞　立
(浙江工学院工业管理工程系，杭州)

摘要：本文研究了不确定线性时滞系统的稳定化鲁棒控制器设计问题，给出了一类不确定线性时滞系统稳定化鲁棒控制器的设计方法. 对于一般的不确定线性时滞系统，如果它们的标称系统是二次型能稳的，则该不确定线性时滞系统也是能稳的，且给出了其稳定化控制器的设计方法.

关键词：鲁棒性；稳定性；时滞系统

1　引　　言

稳定性是控制系统的最重要的特性之一，因此，对一个控制系统，设计一个控制器，使得闭环系统是稳定的这样一个问题的研究，长期以来一直是自动控制领域中十分活跃的一个研究课题. 这个问题的解决，通常依赖于描述控制系统的一个精确的数学模型，以得到的数学模型为基础，应用各种方法(例如用线性二次型状态反馈技术)设计一个控制器，使得闭环系统是稳定的. 但是，由于环境的变化和建模时的误差，使得得到的模型并不能精确地描述被控的动态系统，因此，基于这样的模型设计的控制器应用到被控动态系统时，闭环系统可能达不到所希望的性能，例如系统的稳定性. 所以有必要在设计稳定化的控制器时，就考虑到可能出现的各种不确定的因素，这就是不确定系统的稳定化鲁棒控制器设计问题. 近年来，对这个问题的研究已引起了人们极大的兴趣，同时已发表了大量的文献[1]—[4].

到目前为止，对具有时间滞后的不确定系统，综合一个使得闭环系统是稳定的鲁棒控制器的问题还没有得到考虑. 在很多的控制问题中，时间滞后的现象是经常出现的，并且它的存在常常是导致系统不稳定的根源，因此，研究不确定时滞系统的稳定化鲁棒控制器设计问题，具有很重要的实际意义.

本文首先对一类特殊结构的不确定时滞系统提出了一种稳定化鲁棒控制器的设计方法；其次，引进了一个时滞系统是二次型能稳定的概念，对于忽略了不确定性以后所得到的标称系统是二次型能稳定的不确定时滞系统，给出了稳定化鲁棒控制器的设计方法；最后，给出了一个数值例子，说明本文提出的稳定化鲁棒控制器的设计方法.

2　一类特殊结构的不确定线性时滞系统的稳定化鲁棒控制器设计

考虑由以下状态方程描述的不确定线性时滞系统：

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BF_0(t)E_0)x(t) + (A_1 + BF_1(t)E_1)x(t-h) + Bu(t), \tag{1}$$

* 浙江省自然科学基金资助项目.
本文于1989年5月16日收到. 1990年2月19日收到修改稿.

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

其中，$x(t)\in R^n$、$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态向量和控制向量，A_0、A_1、B、E_0和 E_1是给定的适当维数的矩阵，$h>0$是系统的滞后常数，$\varphi(t)\in R^n$ 是给定的初始值向量，$F_0(t)\in R^{m\times p}$和 $F_1(t)\in R^{m\times q}$是系统的不确定参数矩阵，它们反映了系统的不确定性(模型的误差和系统矩阵中参数的变化)，要求 $F_0(t)$和 $F_1(t)$中的每一个元均是连续函数(可以降低为勒贝格可测函数). 对于不确定参数矩阵 $F_0(t)$和 $F_1(t)$，我们所知道的信息仅仅是它们可能取值的范围，即它们是有界的：

$$F_0^T(t)F_0(t) \leqslant \bar{r}_0^2 I_p, \tag{2}$$

$$F_1^T(t)F_1(t) \leqslant \bar{r}_1^2 I_q. \tag{3}$$

其中，$(\cdot)^T$ 表示了矩阵或向量$(\cdot)$的转置，$\bar{r}_0$和 $\bar{r}_1$是已知的常数，对一个矩阵 F，$F^TF\leqslant rI$ 表示 $rI-F^TF$ 是半正定矩阵，I_p 和 1_q 分别表示 p 阶和 q 阶的单位矩阵，以下，为了简单，我们用 I 表示适当维数的单位矩阵.

我们把系统(1)的稳定化鲁棒控制器的设计方法总结在以下的定理1中.

定理 1　设(A_0,B)是能控的，且 A_1的列可以表示成 B 的列的线性组合，即存在一个矩阵 $Q\in R^{m\times n}$，使得

$$A_1 = BQ, \tag{4}$$

则

$$u(t) = Kx(t) \tag{5}$$

是不确定线性时滞系统(1)的一个稳定化控制律. 其中

$$K = -\frac{1}{2}[(1+\bar{r}_0+\bar{r}_1)I + QQ^T]B^TP. \tag{6}$$

P 是以下的代数 Riccati 方程的解：

$$A_0^TP + PA_0 - PBB^TP + \bar{r}_0E_0^TE_0 + \bar{r}_1E_1^TE_1 + 2I = 0. \tag{7}$$

证　闭环系统(1)和(5)是

$$\dot{x}(t) = [A_0 + BF_0(t)E_0 - \frac{1}{2}B((1+\bar{r}_0+\bar{r}_1)I + QQ^T)B^TP]x(t)$$
$$+ (BQ + BF_1(t)E_1)x(t-h). \tag{8}$$

由于(A_0,B)是能控的，因此(7)的解 P 是一个正定的对称矩阵. 考虑

$$V(x) = x^TPx + \int_{t-h}^{t} x^T(s)Tx(s)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$T = I + \bar{r}_1E_1^TE_1,$$

显然，$V(x)$是一个正定的函数，沿闭环系统(8)的任意轨线，$V(x)$关于时间 t 的导数是

$$\begin{aligned}
L(x,t) \triangleq \mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}t = {} & 2x^TP[A_0 + BF_0(t)E_0 \\
& - \frac{1}{2}B[(1+\bar{r}_0+\bar{r}_1)I + QQ^T]B^TP]x \\
& + 2x^TP(BQ + BF_1(t)E_1)x(t-h) \\
& + x^TTx - x^T(t-h)Tx(t-h) \\
= {} & x^T[A_0^TP + PA_0 - PB(1+\bar{r}_0+\bar{r}_1)B^TP + T]x \\
& + 2x^TPBF_0(t)E_0x + 2x^TPBF_1(t)E_1x(t-h) \\
& - x^TPBQQ^TB^TPx + x^TPBQx(t-h)
\end{aligned}$$

$$+x^T(t-h)Q^TB^TPx-x^T(t-h)Tx(t-h). \tag{10}$$

对任意的矩阵 $F\in R^{p\times q}$，若 $F^TF\leqslant r^2I$，则有

$$2x^TPBFEx\leqslant rx^TPBB^TPx+rx^TE^TEx,\quad \forall\, x\in R^n.$$

因为对任意的 $x\in R^n$，

$$\begin{aligned}0&\leqslant\|r^{\frac{1}{2}}B^TPx-r^{-\frac{1}{2}}FEx\|^2\\&=rx^TpBB^TPx-2x^TPBFEx+\frac{1}{r}x^TE^TF^TFEx\\&\leqslant rx^TPBB^TPx-2x^TPBFEx+rx^TE^TEx.\end{aligned}$$

因此对任意的 $x\in R^n$，有

$$2x^TPBF_0(t)E_0x\leqslant\bar{r}_0x^TPBB^TPx+\bar{r}_0x^TE_0^TE_0x \tag{11}$$

$$2x^TPBF_1(t)E_1x(t-h)\leqslant\bar{r}_1x^TPBB^TPx+\bar{r}_1x^T(t-h)E_1^TE_1x(t-h) \tag{12}$$

把(11)和(12)式代入到(10)式中得到

$$\begin{aligned}L(x,t)\leqslant&x^T[A_0^TP+PA_0-PBB^TP+\bar{r}_0E_0^TE_0+\bar{r}_1E_1^TE_1+I]x\\&-x^TPBQQ^TB^TPx+x^TPBQx(t-h)+x^T(t-h)Q^TB^TPx\\&-x^T(t-h)Tx(t-h)+\bar{r}_1x^T(t-h)E_1^TE_1x(t-h).\end{aligned}$$

由于 P 满足代数 Riccati 方程(7)，故

$$L(x,t)\leqslant-x^Tx-[Q^TB^TPx-x(t-h)]^T[Q^TB^TPx-x(t-h)]<0.$$

以上对满足(2)和(3)的任意不确定参数矩阵 $F_0(t)$ 和 $F_1(t)$ 都成立. 因此，控制器(5)就是不确定系统(1)的一个稳定化鲁棒控制器.

由以上定理的证明过程可以看到，在设计不确定系统(1)的稳定化控制器中，系统的滞后时间 h 可以是未知的，且得到的稳定化控制律也不依赖系统的滞后时间 h.

3 一般的不确定时滞线性系统的稳定化鲁棒控制器设计

在定理1中，要求系统滞后项的系数矩阵 A_1 满足条件 $A_1=BQ$，其中的 $Q\in R^{m\times n}$ 是某个适当的矩阵. 这个条件使得很大的一类不确定时滞系统不能应用以上的方法来设计稳定化鲁棒控制器. 对于确定性的时滞线性系统，利用 Lyapunov 第二方法已经发展了一些稳定化控制器的设计方法[5]-[7]，其中的许多方法采用了以下的 Lyapunov 函数来检验闭环系统的稳定性：

$$V(x)=x^TPx+\int_{t-h}^{t}x^T(s)Tx(s)\mathrm{d}s. \tag{13}$$

其中，$P\in R^{n\times n}$ 是一个正定对称矩阵，$T\in R^{n\times n}$ 是一个半正定的对称矩阵. 因此我们引进以下的概念.

定义 对于以下的时滞线性系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A_0x(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),\\x(t)&=\varphi(t),\quad t\in[-h,0].\end{aligned} \tag{14}$$

其中，$x(t)\in R^n$、$u(t)\in R^m$ 分别是系统的状态向量和控制向量，A_0、A_1 和 B 是适当维数的常数矩阵. 系统(14)称为是二次型能稳的，且具有稳定度 $\alpha>0$，如果存在一个控制律 $u=K(x)$、一个正定的对称矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 和一个半正定的对称矩阵 $T\in R^{n\times n}$，使得

$$L(x,t)=2x^TP[A_0x+A_1x(t-h)+BK(x)]+x^TTx-x^T(t-h)Tx(t-h)$$

$$<-\alpha\|x\|^2. \tag{15}$$

其中,向量范数$\|\cdot\|$取成标准的 Euclidean 范数.

注:由以上的定义不难看出,如果(15)式成立,则 $u=K(x)$就是系统(14)的一个稳定化控制律.

定理 2 对不确定系统(1),如果

$$\bar{r}_0E_0^TE_0+\bar{r}_1E_1^TE_1\leqslant rI. \tag{16}$$

且系统(1)的标称系统(14)是二次型能稳的,且具有稳定度 $\alpha=r$,则不确定系统(1)也是能稳的.

证 由定理的条件知,存在控制 $u=K(x)$和矩阵 $P\in R^{n\times n},T\in R^{n\times n},P>0,T\geqslant 0$,使得

$$L_1(x,t)=2x^TP[A_0x+A_1x(t-h)+BK(x)]+x^TTx-x^T(t-h)Tx(t-h)<-r\|x\|^2.$$

以下我们证明反馈控制律

$$u=K(x)-\frac{1}{2}(\bar{r}_0+\bar{r}_1)B^TPx \tag{17}$$

是不确定时滞线性系统(1)的一个稳定化鲁棒控制律.

考虑

$$\bar{V}(x)=x^TPx+\int_{t-h}^{t}x^T(s)[T+\bar{r}_1E_1^TE_1]x(s)\mathrm{d}s.$$

其中矩阵 P 和 T 就是标称闭环系统的 Lyapunov 函数中的矩阵.则沿闭环系统(1)—(17)的任意轨线,

$$\begin{aligned}\bar{L}(x)\triangleq \mathrm{d}\bar{V}(x)/\mathrm{d}t&=L_1(x,t)+\bar{r}_1x^TE_1^TE_1x-\bar{r}_1x^T(t-h)E_1^TE_1x(t-h)\\&\quad+2x^TP[BF_0E_0x+BF_1E_1x(t-h)]\\&\quad-(\bar{r}_0+\bar{r}_1)x^TPBB^TPx\\&<-r\|x\|^2+\bar{r}_1x^TE_1^TE_1x-\bar{r}_1x^T(t-h)E_1^TE_1x(t-h)\\&\quad+\bar{r}_0x^TPBB^TPx+\bar{r}_0x^TE_0^TE_0x+\bar{r}_1x^TPBB^TPx\\&\quad+\bar{r}_1x^T(t-h)E_1^TE_1x(t-h)-(\bar{r}_0+\bar{r}_1)x^TPBB^TPx,\end{aligned}$$

由条件(16)知道

$$\bar{L}(x,t)<0.$$

因此,闭环系统(1)—(17)是稳定的.

注: 由定理2知道,只要不确定时滞线性系统(1)的标称系统是二次型能稳的,则可以应用已有的技术,设计一个控制律 $u=K(x)$,使得标称闭环系统具有要求的稳定度,然后根据(17)设计出不确定时滞线性系统(1)的稳定化鲁棒控制律.

4 数值例子

例 考虑由以下的状态方程描述的系统:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}x(t)+\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&r\end{bmatrix}\right)x(t-h)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t), \tag{18}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\quad t\in[-h,0].$$

其中,$x(t)\in R^2,u(t)\in R$ 分别是系统的状态向量和控制变量,$h=0.5$是系统的滞后时间,r

是一个不确定的参数，它的一个可能的变化范围是

$$|r| \leqslant 5. \tag{19}$$

要求设计一个控制律

$$u(t) = Kx(t), \tag{20}$$

使得对满足(19)式的任意 r 值，闭环系统(18)—(20)保持是稳定的.

易知系统(18)满足定理1的条件，因此由本文提出的方法可以设计出一个系统(18)的稳定化鲁棒控制器

$$u(t) = -[1.575, 3.885]x(t), \tag{21}$$

当不确定参数 $r=5$时，具有控制(21)的闭环系统响应曲线和系统的自然响应曲线作在如下的图中，由这些曲线可以清楚地看到，控制(21)消除了不确定参数 r 对系统稳定性的影响.

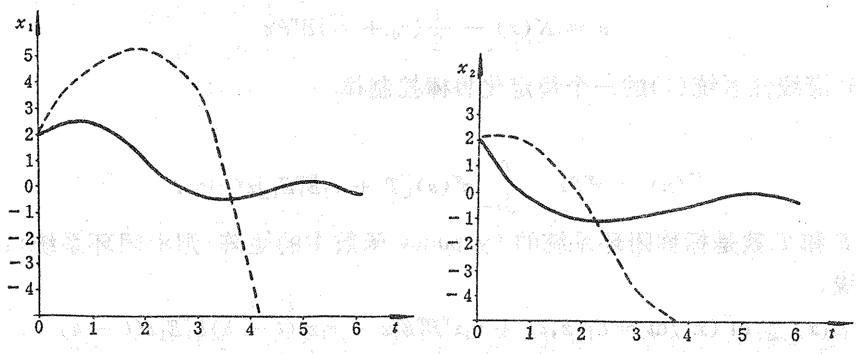

图 1 $r=5$时，开环和闭环系统的状态响应曲线

---- $r=5$时，开环系统状态 x_1的响应曲线 ---- $r=5$时，开环系统状态 x_2的响应曲线

—— $r=5$时，闭环系统状态 x_1的响应曲线 —— $r=5$时，闭环系统状态 x_2的响应曲线

5 结 语

本文研究了不确定线性定常时滞系统的稳定化鲁棒控制器设计问题. 对一类特殊结构的不确定时滞线性系统，给出了稳定化控制律的设计方法，得到的控制律是一个线性时不变的状态反馈控制律. 进而对于较一般的不确定线性时滞系统，只要它的标称系统是二次型能稳定的，则所考虑的不确定线性时滞系统也是能稳的，且给出了稳定化鲁棒控制律的设计方法. 给出的例子说明了应用本文提出的方法设计的控制器，对于时滞系统的不确定性的确具有鲁棒特性.

从描述系统的状态方程(1)可以知道，我们研究的系统的不确定性具有特定的结构，即系统的不确定性必须满足给定的结构条件，这就是由 Leitmann[3]等引进的“匹配条件”. 引用 Barmish[4]等提出的方法，把系统模型中的不确定量分解成匹配部分和不匹配部分，通过引进一个不匹配部分的界，使得只要不匹配部分不超过给定的界，那么这个不满足匹配条件的不确定时滞系统也同样能应用本文提出的稳定化鲁棒控制律的设计方法，从而使得本文的方法能应用到更广的一类不确定时滞系统. 然而这种不匹配部分的界往往是很小的，因此，研究一般的不确定时滞系统的镇定问题仍是以后一个有意义的研究课题.

参 考 文 献

[1] Gutman, S.. Uncertain Dynamical Systems, a Lyapunov Min—Max Approach. IEEE Trans. 1979, AC—24: 437—443

[2] Barmish, B. R.. Necessary and Sufficient Condition for Quadratic Stabilizability of An Uncertain Systems. J. Opti. Theory and Appl., 1985, 46: 399—408

[3] Leitmann, G.. Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems with Bounded Uncertainties. ASME J. Dynamical Systems, Measurement and Control, 1979, 101: 212—216

[4] Barmish, B. R. and Leitmann, G.. On Ultimate Bounded Control of Uncertain System in the Absence of Matching Conditions. IEEE Trans., 1982, AC—27: 153—157

[5] Lee, T. N., Dianat, S.. Stability of Time—Delay Systems. IEEE Trans., 1981, AC—26(4): 951—953

[6] Feliashi, A., Thowsen, A.. Memoryless Stabilization of Linear Delay—Differential Systems. IEEE Trans., 1981, AC—26(2): 586—589

[7] Mori, T., Noldus, E., Kuwahara, M.. A Way to Stabilize Linear Systems with Delayed State. Automatica, 1983, 19(5): 571—573

The Design of Stabilizing Controller for Uncertain Linear Time—delay Systems

Yu Li

(Department of Industrial Management, Zhejiang Institute of Technology, Hangzhou)

Abstract: In this paper, the problem of stabilizing uncertain linear time—delay systems is considered, the design procedure of stabilizing controller for a class of uncertain linear time—delay systems is proposed. For a general uncertain linear time—delay system, if its normal system is quadratic stabilizable, the uncertain linear time—delay system is stabilizable and the design procedure of the stabilizing controller is obtained.

Key words: robustness; stability; time—delay systems