第8卷第2期
1991年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 2
June, 1991

具有指定闭环特征值的离散时间最优调节器的设计

王耀青　　　　吕勇哉
（浙江大学能源系，杭州）（浙江大学化工系，杭州）

摘要：本文研究了LQ最优调节器的逆问题. 在控制变量加权矩阵R给定的条件下，通过引入一组自由变量，给出了满足闭环系统特征值要求的状态加权矩阵Q的一种参数化表示结果. 基于这一结果，文中研究了一类系统的LQ最优调节器之逆问题的解析解法. 通过所求得的自由变量解，就可以直接确定系统的最优状态反馈控制器.

关键词：最优调节器；LQ逆问题；加权矩阵；特征值；特征矢量

1 引　言

考虑如下线性时不变可控离散时间系统的LQ最优调节器问题：

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)], & (1)\\ x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). & (2)\end{cases}$$

式中$A\in\mathscr{R}^{n\times n}$，$B\in\mathscr{R}^{n\times m}$，$x(k)$，$u(k)$分别为$n$，$m$维的状态及控制矢量；矩阵$Q=Q^T\geqslant 0$，$R=R^T>0$. 由解(1)和(2)可以求得(2)的最优控制函数为

$$u(k) = -Kx(k),\quad K = (R + B^TPB)^{-1}B^TPA. \tag{3}$$

其中矩阵$P=P^T\geqslant 0$是方程

$$P = A^TPA - A^TPB(R + B^TPB)^{-1}B^TPA + Q \tag{4}$$

的解. 给定(1)中的加权矩阵Q及R可以求得(2)的最优控制函数(3)[1]. 但由于系统的闭环特征值与矩阵Q及R的选取有关，不同的矩阵Q和R可能导致不同的闭环特征值. 它直接影响到闭环控制系统的动态特性. 所以，如何确定矩阵Q和R使得闭环控制系统

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \tag{5}$$

具有期望的特征值$\{z_i\}_{i=1}^n$是本文所要研究的问题. 这就是所谓的LQ最优调节器的逆问题[2].

目前对LQ逆问题进行研究的方法很多[3]，但研究结果多基于数值迭代求解方法. 本文将研究LQ逆问题的显式代数解法. 文中给出了满足闭环特征值要求的加权阵Q的一种参数化表示结果. 基于这一结果，文中还介绍了一种确定矩阵Q的具体方法. 此外，一旦确定了矩阵Q，不通过求解代数矩阵Riccati方程(4)就可以直接确定(2)的最优反馈控制器(3).

2 加权矩阵Q的参数化表示

为了保证LQ最优调节器之逆问题解的存在性，定义(2)的最优闭环特征值的集合为

本文于1988年9月9日收到. 1990年8月收到修改稿.

$\mathscr{C}_{\mathrm{opt}}^{-}=\{s\in\mathscr{C}\mid s\in\lambda(A-BK)$ 存在 $Q\geqslant 0, R>O$ 使 K 满足(3)和(4)$\}$，其中 $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的全部特征值的集合，并假定系统所期望的闭环特征值 $z_i\in\mathscr{C}_{\mathrm{opt}}^{-}, i=1,2,\cdots,n$. 至于 Z_i 满足什么条件就表示 $z_i\in\mathscr{C}_{\mathrm{opt}}^{-}$(即解的存在性)，可以参阅文献[4]和[5]. 此外，为了书写方便起见，我们还将引入以下数写符号的定义

$$\alpha_i=\alpha(z_i)\alpha(z_i^{-1}),$$

$$\psi_i=CHA_i^{+}(A_i^{-})HC^T\triangleq\psi_i^{+}(\psi_i^{-})^T,$$

$$A_i^{\pm}=(I_m\quad z_i^{\pm1}I_m\quad\cdots\quad z_i^{\pm(n-1)}I_m)^T,$$

$$C=(B\quad AB\ \cdots\ A^{n-1}B).$$

其中 $H=$ 第一行为 $[a_1I_m\quad a_2I_m\quad\cdots\quad a_nI_m]$ 的左上三角 Toeplitz 矩阵，$a_i, i=1,2,\cdots,n$，为(2)的开环特征多项式

$$\alpha(z)=det(zI_n-A)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0 \tag{6}$$

的系数；I_τ 表示 $\tau\times\tau$ 维的单位矩阵. 在不至于混淆的情况下，文中将以 I 来代替 I_τ.

定理 1 考虑由(1)～(4)所描述的 LQ 最优调节器问题的逆问题，该逆问题的解 Q(在 $R=I$ 的条件下)可以参数化表示为

$$Q=-(\alpha_1\xi_1\quad\cdots\quad\alpha_n\xi_n)(\psi_1\xi_1\quad\cdots\quad\psi_n\xi_n)^{-1} \tag{7}$$

的充分必要条件为

1° 由(3)～(5)所确定的闭环控制系统的特征值为 $z_i, z_i\in\mathscr{C}_{\mathrm{opt}}^{-}, i=1,2,\cdots,n$ 且 Z_i 的几何重根个数等于它的代数重根个数；

2° 当 $z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$ 时，矩阵 A 的特征值集合 $\{z_{oi}\}_{i=1}^{n}$ 中的某个 $z_{oi}, z_{oi}=z_i$ 或 $z_{oi}=z_i^{-1}, i\in[1,n]$，的几何重根个数为 1；

式中 $\xi_i, i=1,2,\cdots,n$，的选取使得 $Q=Q^T\geqslant 0$，以及 $\psi_i\xi_i, i=1,2,\cdots,n$，在复数矢量空间 $\mathscr{C}$ 上线性独立，且当 $z_i=z_j^*$ 时，取 $\xi_i=\xi_j^*$，$*$ 表示复数共轭.

证 (充分性) (4)经变换可以表示为

$$R+B^T(z^{-1}I-A^T)^{-1}Q(zI-A)^{-1}B$$

$$=[I+K(z^{-1}I-A)^{-1}B]^T(R+B^TPB)[I+K(zI-A)^{-1}B]. \tag{8}$$

式中 $R=I$，矩阵 K 由(3)定义. 如果由(3)～(5)所确定的闭环控制系统(5)的特征值为 $z_i, i=1,2,\cdots,n$ 且 z^i 的几何重根个数等于它的代数重根个数，则存在矢量 $V_i\in\mathscr{C}^{m\times1}$，当 $z_i=z_j^*$ 时，$V_i=V_j^*, i,j=1,2,\cdots,n; i\neq j$，使得[7, pp. 529]

$$\alpha(z_i)[I+K(z_iI-A)^{-1}B]V_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

(9)意味着(8)满足

$$\alpha_i[I+B^T(z_i^{-1}I-A^T)^{-1}Q(z_iI-A)^{-1}B]V_i=0. \tag{10}$$

当存在某个 $z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$ 时，如果矩阵 A 的特征值集合 $\{z_{oi}\}_{i=1}^{n}$ 中的某个 $z_{oi}, z_{oi}=z_i$ 或 $z_{oi}=z_i^{-1}$ 的几何重根个数为 1. 则(9)和(10)在 $z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$ 时也是有意义的.

为了简便起见，对 $z_i\in\lambda(A)$ 或 $z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$ 这两种情况，在以下证明过程中，我们将只考虑 $z_i\in\lambda(A), z_i^{-1}\overline{\in}\lambda(A)$ 的情况. 定义

$$X_i=\alpha(z_i)(z_iI-A)^{-1}BV_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{11}$$

则(10)可以重新表示为

$$B^T(z_i^{-1}I-A^T)^{-1}QX_i=-\alpha(z_i)V_i,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

利用(11),并定义

$$QX_i = -\alpha_i\xi_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{13}$$

则(12)的两边分别左乘以$(z_iI-A)^{-1}B$即可求得

$$\alpha_i(z_iI - A)^{-1}BB^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i = -\alpha(z_i)(z_iI - A)^{-1}BV_i = -X_i. \tag{14}$$

当利用如下等式关系[7,pp.657],

$$\alpha(z_i^{\pm1})(z_i^{\pm1}I - A)^{-1}B = CHA_i^{\pm} = \psi_i^{\pm}, \tag{15}$$

(14)又可以表示为

$$X_i = CHA_i^{+}(A_i^{-})^THC^T\xi_i = \psi - i\xi_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

因此,由(13)和(16)可以确定(7).当$z_i=z_j^*$时,取$\xi_i=\xi_j^*$可以保证$Q\in\mathscr{R}^{n\times n}$.同时,由于$\psi_i\xi_i$是闭环系统的特征矢量,因而存在$\{\xi_i\}_{i=1}^n$使得$\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$在$\mathscr{C}^n$空间上线性独立,此外,$z_i\in\mathscr{C}_{op}$保证了存在$\xi_i$使得$Q=Q^T\geqslant0$成立.充分性证毕.

(必要性) 在(8)中取$z=z_i$,并在(8)的左右两边分别右乘以$\alpha_iB^T(z_i^{-1}I-A^T)^{-1}\xi_i$,则有

$$\begin{aligned}&\alpha_i[I + K(z_i^{-1}I - A)^{-1}B]^T(I + B^TPB)[I + K(z_iI - A)^{-1}B]B^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i\\ &= \alpha_iB^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i + B^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}Q\psi_i\xi_i.\end{aligned} \tag{17}$$

式中ψ_i由(16)定义.如果矩阵Q由(7)给定,则(17)变为

$$\alpha_i[I + K(z_i^{-1}I - A)^{-1}B]^T(I + B^TPB)[I + K(z_iI - A)^{-1}B]B^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i = 0 \tag{18}$$

对于$z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$的情况,由于已假定$z_i\in\lambda(A)$,$z_i^{-1}\overline{\in}\lambda(A)$,所以,由(18)可以得到

$$\alpha_i[I + K(z_i^{-1}I - A)^{-1}B]B^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{19}$$

在上式中定义

$$\overline{V}_i = \alpha(z_i^{-1})B^T(z_i^{-1}I - A^T)^{-1}\xi_i = (\psi_i^{-})^T\xi_i. \tag{20}$$

则(19)又可以重新表示为

$$\alpha(z_i)[I + K(z_iI - A)^{-1}B]\overline{V}_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{21}$$

由此,(3)中的矩阵K可以等价地表示为

$$K = -[\alpha(z_1)\overline{V}_1 \ \cdots \ \alpha(z_n)\overline{V}_n][\overline{X}_1\cdots\ \overline{X}_n]^{-1}. \tag{22}$$

式中$\overline{X}_i$, $i=1,2,\cdots,n$,定义为

$$\overline{X}_i = \alpha(z_i)(z_iI - A)^{-1}B\overline{V}_i = \psi_i^{+}\overline{V}_i = \psi_i\xi_i. \tag{23}$$

对(22)进行变换可以求得

$$K\overline{X}_i = -\alpha(z_i)\overline{V}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{24}$$

再由(23)又可以求得

$$(z_iI - A)\overline{X}_i = \alpha(z_i)B\overline{V}_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{25}$$

将(24)左乘以矩阵B,并代入(25)有

$$(A - BK)\overline{X}_i = z_i\overline{X}_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{26}$$

由此可见,闭环系统(5)的最优特征值就是$\{z_i\}_{i=1}^n$,且z_i的几何重根个数等于它的代数重根个数.

另一方面,$\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$在空间$\mathscr{C}^n$上线性独立意味着$\psi_i\neq0$, $i=1,2,\cdots,n$.由ψ_i的定义可知,$\psi_i\neq0$必然有$\psi_i^{\pm}=CHA_i^{\pm}\neq0$,式中

$$CHA_i^{\pm} = [adj(z_i^{\pm}I - A)]B, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

当 $z_i^{\pm1}\in\lambda(A)$ 时，如果矩阵 A 的特征值集合 $\{z_{oi}\}_{i=1}^n$，中某个 z_{oi} 的几何重根个数大于1，且 $z_{oi}=z_i$ 或 $z_{oi}=z_i^{-1}$ 则有 $\psi_i^{\pm}=0$. 这与 $\psi_i^{\pm}\neq0$ 相矛盾. 所以，当 $\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在空间 $\mathscr{C}^n$ 上线性独立时，满足 $z_{oi}=z_i$ 或 $z_{oi}=z_i^{-1}$ 的 z_{oi} 的几何重根个数必为1. 必要条件1°和2°证毕.

由定理1不难发现，在(2)所期望的闭环特征值满足定理1的充分必要条件时，为了求得LQ逆问题的解，关键问题是求解(7)中的变量 ξ_i. 此外，由定理1的证明可知，一旦求得 ξ_i，根据(20)，(22)及(23)就可以确定反馈系数矩阵 K，并且可知它与由(3)和(4)所确定的矩阵 K 相一致. 从而简化了最优控制系统的设计.

3　约束条件的简化及LQ逆问题的解法

为了简便起见，本节假定 $z_i^{\pm1}\overline{\in}\lambda(A)$，$i=1,2,\cdots,n$.

由定理1可知，变量 ξ_i 的确定要满足两个条件：a) $Q=Q^T\geqslant0$；b) $\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在空间 $\mathscr{C}^n$ 上线性独立. 所以，直接在这两个约束条件下由(7)求 ξ_i 比较困难. 下面的结论将有助于问题的简化.

引理1　a) $\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在空间 $\mathscr{C}^n$ 上线性独立的充分条件是矩阵对 (Q,A) 可观；b) 矩阵对 (Q,A) 可观的充分条件是 $z_i^{\pm1}\overline{\in}\lambda(A)$，且存在某个矩阵 Q，$Q=Q^T\geqslant0$.

证　a) 如果矩阵对 (Q,A) 可观，则(4)的解 P 满足 $P=P^T>0$. 根据文献[5]和[7]，矩阵 P 又可以表示为 $P=W(X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n)^{-1}$，式中 $W\in\mathscr{C}^{n\times n}$，$X_i=\psi_i\xi_i$，　$i=1,2,\cdots,n$. 因 $P>0$ 意味着 $\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在空间 $\mathscr{C}^n$ 上线性独立.

b) 由最优调节器理论可知，矩阵对 (Q,A) 可观，则(5)的特征值 $z_i^{\pm1}\overline{\in}\lambda(A)$，$i=1,2,\cdots,n$. 反之，若矩阵对 (Q,A) 不可观，则必然存在某个 $z_i\in\lambda(A)$ 或 $z_i^{-1}\in\lambda(A)$. 基于这一实事可知，当 $z_i^{\pm1}\overline{\in}\lambda(A)$，并且存在矩阵 $Q=Q^T\geqslant0$，则该矩阵一定使得矩阵对 (Q,A) 是可观的. 引理1证毕.

根据的 $\mathscr{C}_{\rm opt}^-$ 定义，矩阵 $Q=Q^T\geqslant0$ 存在的充分条件是 $z_i\in\mathscr{C}_{\rm opt}^-$. 所以，结合引理1可知，为了求得LQ逆问题的解，只须在 $z_i^{\pm1}\overline{\in}\lambda(A)$，$z_i\in\mathscr{C}_{\rm opt}^-$，$i=1,2,\cdots,n$，的条件下求解出满足 $Q=Q^T\geqslant0$ 时的解 ξ_i 即可. 实际上，我们只要确定使得方程

$$\overline{Q}=\overline{Q}^T=X^TQX=-(\psi_1\xi_1\quad\psi_2\xi_2\quad\cdots\quad\psi_n\xi_n)^T(\alpha_1\xi_1\quad\cdots\quad\alpha_n\xi_n)\geqslant0 \tag{27}$$

成立时的 ξ_i，$i=1,2,\cdots,n$，即可，式中 X 定义为

$$X=(\psi_1\xi_1\quad\psi_2\xi_2\quad\cdots\quad\psi_n\xi_n). \tag{28}$$

限于篇幅，本文将不研究(27)的计算方法问题. 下节将给出一类系统LQ逆问题的解法.

4　一类系统的LQ逆问题的解法

引理2　考虑由(1)～(4)所描述的LQ最优调节器问题的逆问题，该逆问题具有解 $R=R^T>0$，$Q=D^TD$，$D\in\mathscr{R}^{1\times n}$，的充分必要条件为

1° (2)的特征值 z_{oi}，$i=1,2,\cdots,n$，的几何重根个数为1；

2° (2)所期望的闭环特征值 z_i 满足 $z_i\neq z_j$，$i\neq j$，$z_i\in\mathscr{C}_{\rm opt}^-$，$i=1,2,\cdots,n$.

证　该引理的证明可以参阅文献[5]和[9].

根据引理2可以给出如下定理：

定理2　考虑由(1)～(4)所描述的LQ最优调节器问题的逆问题. 如果 z_{oi}，$i=1,2,\cdots,n$，的几何重根个数为1，且 z_i，$i=1,2,\cdots,n$，满足 $z_i\in\mathscr{C}_{\rm opt}^-$，$z_i\neq z_j$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则满足闭环特征值要求的加权矩阵 Q 可以由如下方程来确定

$$Q = D^T D, \quad D \in R^{1\times n}. \tag{29}$$

其中矩阵 D 是方程

$$\begin{cases} D\psi_i D^T = -\alpha_i, z_i^{\pm} \overline{\in} \lambda(A), & (30a) \\ D\psi_j \xi_j = 0, \quad z^{\pm 1} \in \lambda(A), \forall\ \xi_j \text{ 满足 } \psi_j \xi_j \neq 0 & (30b) \end{cases}$$

的解. 式中 $i=1,2,\cdots,n; i\neq j, j\in[1,n]$

证　由引理 2 及 $\mathscr{C}_{\text{opt}}^-$ 的定义可知，当 z_{oi} 的几何重根个数为 1，且 z_i 满足 $z_i\in\mathscr{C}_{\text{opt}}^-, z_i\neq z_j, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，时，系统(2)的 LQ 逆问题至少存在一个形如(29)的解. 此外，根据定理 1，(29)中的矩 Q 又可以参数化表示为(7).

下面来证明(30). 定义

$$D\psi_j\xi_j = k_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{31}$$

将(29)代入(7)，并经整理可以求得

$$k_i D^T = -\alpha_i \xi_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{32}$$

当 $z_i^{\pm 1}\overline{\in}\lambda(A)$ 时，矩阵对 $(D, A-BK)$ 的可观性意味着 $k_i\neq 0$ 和 $\alpha_i\neq 0$. 因此，由(31)及(32)便可以求得(30a).

当存在 $z_j^{\pm 1}\in\lambda(A)$ 时，由(32)可知，$D\neq 0$ 及 $\alpha_j=0$ 意味着 $k_j=0$，此时，(31)变为

$$k_j = D\psi_j\xi_j = 0, \quad D \neq 0, \quad \forall\ \xi_j \text{ 使得 } \psi_j\xi_j \neq 0.$$

这就是(30b). 定理 2 证毕.

有了定理 2，根据(30b)或(32)可以确定 $\xi_i, i=1,2,\cdots,n$，且 ξ_i 使得 $\{\psi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在空间 $\mathscr{C}^n$ 上线性独立[7,pp.529]. 因此，根据(20)，(22)及(23)就可以直接求得(2)的最优状态反馈系数矩阵 K.

由于 z_i 是人为给定的. 所以定理 2 中关于 z_i 的互异性条件是可以满足的. 但对于 z_{oi} 来说就难以保证它仅仅是几何重根个数为 1. 因此，对于实际问题，有必要对定理 2 进行改进.

引理 3　为了使得(2)具有期望的闭环极点 $z_i, i=1,2,\cdots,n$，$\lambda_i(A)$ 的几何重根个数 N 必须满足 $N\leqslant\min\{\text{rank}Q, \text{rank}B\}$.

引理 3 表明，只要改变矩阵 Q 的秩就可以达到改变定理 2 中关于 $\lambda_i(A)$ 须几何重根个数为 1 的约束条件.

推论 1　如果(2)所期望的闭环特征值 z_i 满足 $z_i\neq z_j, z_j^{\pm 1}\overline{\in}\lambda(A), i,j=1,2,\cdots,n, i\neq j$，则满足闭环系统特征值要求的加权矩阵 Q 可以取为 $Q=D^TD+\sigma I$，式中 $\sigma>0$，矩阵 D 是方程

$$\begin{cases} D\psi_j\xi_j = 0, \quad j \in [1,n], & (33a) \\ D\psi_i(\sigma^{-1}\alpha_i I + \psi_i)^{-1} D^T = 1, \quad j = 1,2,\cdots,n, \quad i \neq j & (33b) \end{cases}$$

的解，其中 ξ_j 满足

$$(\sigma^{-1}\alpha_j I + \psi_j)\xi_j = 0, \quad \alpha_j \in \lambda(-\sigma\psi_j) \tag{33c}$$

证　可以仿照定理 2 的证明进行，在此略.

5　设计举例

考虑如下线性时不变二阶离散时间系统

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -0.8 & 1.8\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u(k),$$

设计一最优控制器使得 $z_1=0.4$, $z_2=0.5$，取 $R=I$.

由已知条件可知 $a(z)=z^2-1.8z+0.8$; $a(z_1)=0.24$, $a(z_2)=0.15$, $a_1=0.612$, $a_2=0.18$;

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -0.8 & 1.8\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}-1.8I & I\\ I & 0\end{bmatrix},$$

$$\psi_1^+=\begin{bmatrix}-1.4 & 1\\ -0.8 & 0.4\end{bmatrix},\quad \psi_2^+=\begin{bmatrix}-1.3 & 1\\ -0.8 & 0.5\end{bmatrix},\quad \psi_1^-=\begin{bmatrix}0.7 & 1\\ -0.8 & 1.8\end{bmatrix},$$

$$\psi_2^-=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ -0.8 & 2\end{bmatrix},\quad \psi_1=\begin{bmatrix}0.02 & 3.62\\ -0.16 & 1.64\end{bmatrix},\quad \psi_2=\begin{bmatrix}0.74 & 3.04\\ 0.34 & 1.64\end{bmatrix},$$

设 $D=(d_1\quad d_2)$，由方程(30)可以得到

$$\begin{cases}0.02d_1^2+1.64d_2^2+3.46d_1d_2=-0.612,\\ 0.74d_1^2+1.64d_2^2+3.38d_1d_2=-0.18.\end{cases}$$

此方程的解是 $D=\pm(0.76\quad -0.29)$ 和 $D=\pm(0.71\quad -1.18)$. 利用解 $D=(0.71\quad -1.18)$ 以及(32)，(20)(22)和(23)可以求得(2)的最优状态反馈系数矩阵 $K=\begin{bmatrix}0.2683 & -0.3889\\ -0.4303 & 0.6316\end{bmatrix}$. 不难验证，把 $Q=(0.71\quad -1.18)^T(0.71\quad -1.18)$ 及 $R=I$ 代入(4)有解 $P=\begin{bmatrix}0.8485 & -1.3413\\ -1.3413 & 2.1409\end{bmatrix}$. 再根据(3)可以验证上述结果. 此是时，$\lambda(A-BK)=\{0.4, 0.5\}$

6 结束语

本文研究了满足闭环系统特征值要求的加权矩阵 Q 的参数化表示方法. 基于这一结果，文中还给出了解析求解一类系统的 LQ 逆问题解的具体解法. 由于(30)属于非线性方程，对于高阶系统，求(30)的解还不够方便. 所以如何以(7)给出更一般情况下的 LQ 最优调节器之间逆问题的求解方法，将有待于进一步研究.

参 考 文 献

[1] Anderson, B. D. O.; Moore. B. J.. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, N. J. Prentice—Hall, 1971

[2] Kalman, R. E.. When is a Linear Control System Optimal. J. Basic Eng. Trans. ASME, 1964, 86D: 51—56

[3] Johnson, M. A., Grimble, M. J.. Recent Trends in Linear Optimal Quadratic Multivarible Control System Design. IEE Proc. 1987, 134, Pt. D., (1): 53—71

[4] Lee, T. T., Liaw, G. T.. The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance. Int. J. Control, 1986, 43 (1): 233—246

[5] 王耀青. 线性多变量最优控制的研究——LQ 逆问题及鲁棒控制器的设计. 浙江大学博士学位论文, 1989 年 5 月, 杭州

[6] MacFarlane, A. G. J.. An Eigenvalue Solution of the Optimal Linear Regulator Problem. J. Electronic Control, 1963, 14: 643—654

[7] Kailath, T.. Linear Systems, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall, 1980

[8] Potter, J. E.. Matrix Quadratic Equation. SIAM J. Appl. Math, 1966, 14:496—501
[9] Harvey, C. A., Stein, G.. Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Propertios. IEEE Trans. Automat. Contr., 1978, AC—23(3):378—387

The Design Discrete-Tine Optimal Regulators with Assigned Eigenvalues

Wang Yaoqing
(Department of Thermoscience Engineering, Zhejiang University, Hangzhou)
Lu Yongzai
(Department of Chemical Engineering, Zhejing University, Hangzhou)

Abstract: This paper is a study on the inverse problem of LQ optimal regulators. With the control weight given, the state weighting matrix satisfying the closed-loop eigenvalue requirements is parametrized in terms of a set of free variables. Based on the parametrization, an analytic procedure is proposed to determine the state weighting matrix, as well as the free variables, for a class of systems. Meanwhile, by using the solved free variables, the optimal controller gain matrix can be determined without solving the algebraic Riccati equation.

Key words: optimal regulator; LQ inverse problem; weighting matrices; eigenvalue and eigenvector

---

ANNOUMCEMENT for Ho Pan Ching Yi award for outstanding Chinese written papers on the subject of Discrete Event Dynamic Systems (DEDS).

This award is in honour of the 90th birthday of Mrs. Ho Pan Ching Yi, mother of Y. C. Ho, whose career is greatly influenced by her love, support and sacrifices.

PURPOSE:

- ☐ To identify, reward, promote and publicize internationally recognized fundamental contributions from China in the field of DEDS.

RULES AND ORGANIZATION:

- ☐ A prize consisting of US $ 1000.00 payable in the U. S. will be funded by Y. C. Ho for five consecutive times (a total of US $ 5000.00) at intervals of no less than one year. There is a possibility that this prize will continue to be awarded after these five times with additional funding.
- ☐ All papers published in Chinese worldwide on the subject of DEDS are eligible.
- ☐ A panel of international judges (including Xiren Cao, Hanfu Chen, Botian Li, T. J. Tarn, David Yao and Yingpin Zheng) will make the selection and final decision.
- ☐ A prize may not be awarded in any particular year if no papers are considered suitable. However at least a total of five prizes will be awarded.
- ☐ The competition is to start in 1991 (deadline for consideration 12/31/91) with first award to be given in May 1992. Authors may submit works for consideration to the committee via the journal office of the CONTROL THEORY AND APPLICATIONS or directly to any member of the committee.
- ☐ Winners will be encouraged to publicize their contributions by translating their papers into English, for which assistance will be provided. It is hoped that this will foster cooperation between Chinese researchers in DEDS and researchers of other nationalities.