

闭环极点在指定区域内的 l^1 优化控制器*

方华京 涂 健
(华中理工大学自动控制系, 武汉)

摘要: 本文提出了一种闭环极点在指定区域内的 l^1 优化反馈控制器的设计方法. 证明了对闭环极点的位置加以限制后, 指标函数的下确界和无限制时的指标函数下确界相同. 这就保证了在满足瞬态特性要求后, 不会明显降低系统的抗扰性或鲁棒性. 给出了任意逼近指标函数下确界的计算步骤和计算实例.

关键词: 离散系统; 最优化; 计算方法; 极点配置

1 引言

文献[1-4]研究了线性离散系统的 l^1 优化设计问题. 用这种方法设计的控制系统能抗持续有界扰动, 或/和具有 l^∞ 稳定的鲁棒性. 在实际工程问题中对控制系统除了抗扰性和鲁棒性的要求外, 还要求闭环系统具有良好的瞬态特性. 系统的瞬态特性与闭环极点在 z 平面的位置有关, 对瞬态特性的要求可转化为对系统闭环极点位置的要求. 因此, 在 l^1 优化设计中若能兼顾系统闭环极点的位置, 便有可能得到品质良好的控制器.

本文首先把保证闭环极点在指定区域内的控制器参数化, 然后在满足闭环系统瞬态特性要求的前提下考虑 l^1 优化设计问题. 证明了对闭环极点的位置加以限制后, l^1 优化的指标函数下确界与无极点限制时的指标函数的下确界相同. 这样, 在兼顾满足瞬态特性要求的同时不会明显降低系统的抗扰性和鲁棒性. 给出了使系统闭环极点在指定区域内的 l^1 优化控制器的计算步骤. 最后给出了一个计算实例, 该例求出了一个能任意逼近指标函数下确界的控制器序列.

2 广义内稳定, 参数化和问题的表述

本文中用 A 表示 l^1 空间全体元素的 z 变换

$$A = \{ \hat{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i \mid f = \{f_i\} \in l^1 \} \text{ [注]}. \quad (2.1)$$

由文献[1]知, A 是全体 BIBO 稳定的单变量离散系统脉冲传递函数的集合, $\hat{f} \in A$ 是 l^∞ 空间上的有界线性算子, 其范数为

$$\| \hat{f} \|_A = \| f \|_1. \quad (2.2)$$

根据对闭环瞬态特性的要求在 z 平面确定一个广义的稳定区域 D , 满足:

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1989年3月27日收到. 1990年1月15日收到修改稿.

[注]: 在 l^1 优化理论中, 对序列 $f = \{f_i\}$ 的 z 变换定义为 $\hat{f}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i$, 与习惯使用的 z 变换 $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i}$ 不同, 它们之间的关系是 $F(z) = \hat{f}(\frac{1}{z})$.

- 1) D 是含无穷远点的一个开集.
 - 2) 若 $s \in D$, 其共轭复数 $\bar{s} \in D$.
 - 3) $D \cap D_u = \text{空集}$ ($D_u = \{z \mid |z| \leq 1\}$).
- 用 A_D 表示满足下述条件的 z 变换集合:

- 1) $A_D \subset A$.
- 2) A_D 中元素的极点全部位于 D 中.

考虑图 1 所示的线性离散系统, 图中 $\hat{p}(z)$, $\hat{c}(z)$ 分别是控制对象和控制器的脉冲传递函数. 这个模型可用来描述多种控制问题^[5]. 用 $\hat{H}(p, c)$ 表示 u_1, u_2 到 e_1, e_2 的脉冲传递矩阵.

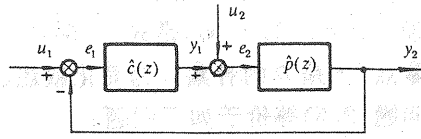


图 1 线性离散系统

定义 2.1 若 $\hat{H}(p, c) \in A_D^{2 \times 2}$ ($A_D^{2 \times 2}$ 是元素属于 A_D 的全体 2×2 矩阵), 则称 (\hat{p}, \hat{c}) 是广义内稳定, \hat{c} 广义内稳定 \hat{p} .

设 \hat{p}, \hat{c} 的状态方程分别为

$$x_1(k+1) = Q_1 x_1(k) + R_1 e_1(k); \quad y_1(k) = S_1 x_1(k) + t_1 e_1(k).$$

$$x_2(k+1) = Q_2 x_2(k) + R_2 e_2(k); \quad y_2(k) = S_2 x_2(k) + t_2 e_2(k).$$

令 $x = [x_1^T, x_2^T]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$, $y = [y_1, y_2]^T$, 则图 1 所示闭环系统的状态方程为

$$x(k+1) = Qx(k) + Ru(k); \quad y(k) = Sx(k) + Tu(k). \quad (2.3)$$

其中 Q, R, S, T 的具体表达式见文献^[5].

定理 2.1

1) 若 $(Q_1, R_1, S_1), (Q_2, R_2, S_2)$ 都可稳定, 可检测, 且 $1 + t_1 t_2 \neq 0$, 则闭环系统 (2.3) 渐近稳定 (Q 的特征值 λ_i 满足 $|\lambda_i| < 1$) 的充分条件是 $\hat{H}(p, c) \in A_D^{2 \times 2}$.

2) 若 $(Q_1, R_1, S_1), (Q_2, R_2, S_2)$ 都可控, 可观, 且 $1 + t_1 t_2 \neq 0$, 则 Q 的特征值 λ_i 全部满足 $\frac{1}{\lambda_i} \in D$ 的充分必要条件是 $\hat{H}(p, c) \in A_D^{2 \times 2}$.

证 与文献^[5]中引理 5-1-17 的证明类似, 略.

将文献^[5]的一般理论用于集合 A_D (易证 A_D 也是一个主理想整环), 可得广义内稳定 \hat{p} 的控制器参数化公式.

定理 2.2 把 \hat{p} 表示为 $\hat{p} = \hat{n}_p / \hat{d}_p$, $\hat{n}_p, \hat{d}_p \in A_D$ 且在 A_D 中互质. 选 $\hat{x}, \hat{y} \in A_D$, 使 $\hat{x}\hat{n}_p + \hat{y}\hat{d}_p = 1$, 则全体广义内稳定 \hat{p} 的控制器是

$$G(p) = \{ \hat{c} = (\hat{x} + \hat{r}\hat{d}_p)(\hat{y} - \hat{r}\hat{n}_p)^{-1} \mid \hat{r} \in A_D, \hat{y} - \hat{r}\hat{n}_p \neq 0 \}. \quad (2.4)$$

$G(p)$ 中的控制器 \hat{c} 自身可能不稳定. 但是, 由定理 2.1 知只要 \hat{c} 可实现, 且构成 \hat{p}, \hat{c} 的实际系统都是可稳定, 可检测, 便能保证闭环系统内部无不稳定因子是渐近稳定的.

单变量系统的抗持续有界扰动及鲁棒稳定等 l^1 优化设计问题, 可归结为加权灵敏度函数或加权灵敏度补函数的 l^1 范数极小化问题^[4]. 利用 (2.4) 参数化后, 具有指定闭环极点区域的 l^1 优化设计问题可表示成下面的一般形式

$$\mu = \inf_{\hat{r} \in A_D} \| \hat{h} - \hat{r}\hat{v} \|_A. \quad (2.5)$$

其中 $\hat{h}, \hat{v} \in A_D$ 由 \hat{p} 确定.

3 两个定理

对系统的闭环极点加以限制后, l^1 优化控制系统的抗扰性和鲁棒性会受到怎样的影

响呢?下面分析这个问题.

设 $\alpha_i, i=1, 2, \dots, n_1$, 是式(2.5)中 \hat{v} 在 D_u 中的零点; $\beta_j, j=1, 2, \dots, n_2$, 是 \hat{v} 在 $D^c - D_u$ 中的零点(D^c 是 D 的补集). 为简化叙述, 设 α_i, β_j 全部互异(有重零点时可类似讨论). 易证优化问题(2.5)等价于如下问题:

$$\text{优化问题 1 (Opt. 1)} \quad \mu_1 = \inf_{k \in S_D} \|\hat{h} - \hat{k}\|_A.$$

$$\text{其中} \quad S_D = \{k \in l^1 | \hat{k} \in A_D, \hat{k}(\alpha_i) = 0, \hat{k}(\beta_j) = 0\}.$$

为分析问题, 再考虑:

$$\text{优化问题 2 (Opt. 2)} \quad \mu_2 = \inf_{k \in S_D} \|\hat{p}h - \hat{k}\|_A. \text{ 其中 } \hat{p}h \text{ 是 } n_1 + n_2 - 1 \text{ 次多项式, 满足}$$

$$\hat{p}h(\alpha_i) = \hat{h}(\alpha_i), \quad \hat{p}h(\beta_j) = \hat{h}(\beta_j).$$

$$\text{优化问题 3 (Opt. 3)} \quad \mu_3 = \inf_{k \in S} \|\hat{h} - \hat{k}\|_A.$$

$$\text{其中} \quad S = \{k \in l^1 | \hat{k} \in A, \hat{k}(\alpha_i) = 0\}.$$

(Opt. 3) 就是无极点限制的一般 l^1 优化设计问题.

定理 3.1 优化问题 1, 2, 3 的下确界相同, 即

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0. \quad (3.1)$$

虽然 Opt. 1 的下确界和 Opt. 3 的相同, Opt. 1 却不一定存在达到下确界的 $\hat{k} \in S_D$. 但是, 我们有

定理 3.2 对任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $k^* \in S_D$, 使

$$\|\hat{h} - \hat{k}^*\|_A < \mu_0 + \varepsilon. \quad (3.2)$$

并且, $\hat{b} = \hat{h} - \hat{k}^*$ 是多项式.

这两个定理保证了存在既满足闭环极点的限制, 又不会明显降低系统抗扰性或鲁棒性的 l^1 优化控制器. 为证明这两个定理先给出两个引理.

引理 3.1^[6] 设 x 是实赋范线性空间 X 中的一个元素, M 是 X 的一个子空间, d 表示 x 到 M 的距离, 则有

$$d = \inf_{m \in M} \|x - m\| = \max_{\substack{\|x^*\| \leq 1 \\ x^* \in M^\perp}} \langle x, x^* \rangle. \quad (3.3)$$

等式右端对某些 $x_0^* \in M^\perp$ 可达到其最大值. 这里 X^* 表示 X 的对偶空间. $x^* \in X^*$ 是 X 上的有界线性泛函. $\langle x, x^* \rangle$ 是泛函 x^* 在 x 处的值. $M^\perp \subset X^*$ 是 M 的零化子空间.

引理 3.2 实系数多项式在 A_D 中稠密.

证 显然, 略.

定理 3.1 的证明: 令 $Re_i = \text{Re}(1, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots)$, $Im_i = \text{Im}(0, \alpha_i, \alpha_i^2, \dots)$, 于是有

$$S_D^\perp = S^\perp = \{g \in l^\infty | g = \sum_{i=1}^{n_1} (\varphi_i Re_i + \varphi_{i+n_1} Im_i)\}.$$

其中 φ_i 是任意实数. 由 $\hat{p}h$ 的定义又有

$$\langle h, Re_i \rangle = \langle ph, Re_i \rangle = \text{Re}[\hat{h}(\alpha_i)],$$

$$\langle h, Im_i \rangle = \langle ph, Im_i \rangle = \text{Im}[\hat{h}(\alpha_i)].$$

于是 Opt. 1, 2, 3 的对偶问题都是

$$\mu_0 = \max_{\hat{k}_1} \sum_{i=1}^{n_1} \{ \varphi_i \operatorname{Re}[\hat{h}(\alpha_i)] + \varphi_{i+n_1} \operatorname{Im}[\hat{h}(\alpha_i)] \}$$

s. t. $\|g\|_\infty \leq 1.$

由引理 3.1, 知式 (3.1) 成立. 证毕.

定理 3.2 的证明: 对 Opt. 2, 由定理 3.1 知存在 $\hat{k}_1 \in S_D$, 使 $\|\hat{p}h - \hat{k}_1\|_A \leq \mu_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\hat{k}_1 = \hat{p}k_1 \cdot \hat{k}_2$, $\hat{p}k_1$ 是 $n_1 + n_2$ 次多项式, $\hat{p}k_1(\alpha_i) = \hat{p}k_1(\beta_j) = 0$, $\|\hat{p}k_1\|_A = 1$, $\hat{k}_2 \in A_D$. 对于 \hat{k}_2 , 由引理 3.2 知存在一个 n_3 次多项式 $\hat{p}k_2$, 使

$$\|\hat{k}_2 - \hat{p}k_2\|_A < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

令 $\hat{p}k^* = \hat{p}k_1 \cdot \hat{p}k_2$ (是 $N = n_1 + n_2 + n_3$ 次多项式). 根据 A 是 Banach 代数^[5]和式 (3.4), 有

$$\begin{aligned} \|\hat{k}_1 - \hat{p}k^*\|_A &= \|\hat{p}k_1(\hat{k}_2 - \hat{p}k_2)\|_A \\ &\leq \|\hat{p}k_1\|_A \|\hat{k}_2 - \hat{p}k_2\|_A < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

于是, $\|\hat{p}h - \hat{p}k^*\|_A = \|\hat{p}h - \hat{k}_1 + \hat{k}_1 - \hat{p}k^*\|_A$
 $\leq \|\hat{p}h - \hat{k}_1\|_A + \|\hat{k}_1 - \hat{p}k^*\|_A < \mu_0 + \varepsilon.$

$\hat{p}h - \hat{p}k^* = \hat{\delta}$ 是多项式, 令 $\hat{k}^* = \hat{h} - \hat{\delta}$, 则 $\hat{k}^* \in S_D$. 并满足 (3.2) 式. 证毕.

4 计算步骤

用 R^m 表示 m 维实空间, 定义

$$S_m = \{pk \in R^m \mid \hat{p}k(\alpha_i) = 0, \hat{p}k(\beta_j) = 0\}. \tag{4.1}$$

视 R^m 是 R^{m+1} 空间的矢量令第 $m+1$ 个分量为零构成的子空间, 则有

$$S_m \subset S_{m+1} \subset \dots \subset S_N \subset S_{N+1}. \tag{4.2}$$

优化问题 $\mu_m = \min_{\hat{k} \in S_m} \|\hat{p}h - \hat{p}k\|_A$ 是有限维空间中的问题. 由文献[6]知最优解存在, 且由 (4.2), 有

$$\mu_m \geq \mu_{m+1} \geq \dots \geq \mu_N \geq \mu_{N+1}.$$

由定理 3.2 的证明可知: $\mu_0 \leq \mu_{N+1} \leq \mu_0 + \varepsilon$, 并可通过与 μ_{N+1} 对应的 $\hat{\delta}_{N+1} = \hat{p}h - \hat{p}k_{N+1}$ 求出满足 (3.2) 的 \hat{k}^* .

当 \hat{p} 无单位圆周上零极点时, 由文献[2, 3]知 Opt. 3 的最优解存在, 可求出下确界 μ_0 . 于是, 可按如下步骤计算 Opt. 1:

- 1) 求解 Opt. 3 得 μ_0 . 令 $m = n_1 + n_2$.
- 2) 求解 $\mu_m = \min_{\hat{k} \in S_m} \|\hat{p}h - \hat{p}k\|_A$, 得 $\hat{p}k_m$.
- 3) 若 $|\mu_m - \mu_0| / \mu_0 \leq \varepsilon$; 转步 4), 否则, 令 $m = m + 1$, 转步 2).
- 4) 令 $\hat{k}^* = \hat{h} - (\hat{p}h - \hat{p}k_m)$ 作为 Opt. 1 的近似解. 其中 Opt. 3 的求解和步 2) 的极小化计算已另文详述, 这里不再重复.

5 算 例

图 2 所示系统中 u 是参考输入, y 是输出, d 是在系统输出端幅值不大于 1 的任意扰动信号. 控制对象为

$$\hat{p}(z) = \frac{z}{(2z-1)(z-2)}$$

取广义稳定区域 $D = \{z \mid |z| > 3\}$. 求控制器 $\hat{c}(z)$ 使扰动对输出的影响尽可能小, 且闭环系统是广义内稳定的. 这是一个最优灵敏度问题, 可表示为

$$\inf_{\hat{c} \in Q(z)} \|(1 + \hat{p}\hat{c})^{-1}\|_A$$

经计算得无极点限制时的最优灵敏度函数

$\hat{\delta}^* = (1 + \hat{p}\hat{c}^*)^{-1} = 1 - 2z$, 指标下确界 $\mu_0 = \|\hat{\delta}^*\|_A = 3$, 最优控制器 $\hat{c}^* = 2(2-z)$, 闭环传函 $\hat{\psi}^* = \hat{p}(1 + \hat{p}\hat{c}^*)^{-1} = \frac{z}{2-z}$. 限制闭环极点在 D 中后

$$\hat{\delta}_m(z) = (1 + \hat{p}\hat{c}_m)^{-1} = 1 - \left[2 + \frac{3}{2(2^{2m-2} - 1)}\right]z + \left[\frac{3 \times 2^{m-2}}{2^{2m-2} - 1}\right]z^m,$$

$$\mu_m = \|\hat{\delta}_m\|_A = 3 + \frac{3(2^{m-1} + 1)}{2(2^{2m-2} - 1)}, \quad \hat{c}_m = \frac{1 - \hat{\delta}_m}{\hat{p}\hat{\delta}_m}$$

当 $m=3$ 时:

$$\hat{\delta}_3 = 1 - 2\frac{1}{10}z + \frac{2}{5}z^3, \quad \mu_3 = 3.5, \quad |\mu_3 - \mu_0|/\mu_0 = 0.167,$$

$$\hat{c}_3 = \frac{21 - 4z^2}{5 + 2z}, \quad \hat{\psi}_3 = \frac{z(5 + 2z)}{10}$$

当 $m=5$ 时:

$$\hat{\delta}_5 = 1 - 2\frac{1}{170}z + \frac{24}{255}z^5, \quad \mu_5 = 3.1, \quad |\mu_5 - \mu_0|/\mu_0 = 0.033,$$

$$\hat{c}_5 = \frac{1023 - 48z^4}{225 + 126z + 60z^2 + 24z^3}, \quad \hat{\psi}_5 = \frac{z(255 + 126z + 60z^2 + 24z^3)}{510}$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mu_m - \mu_0| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3(2^{m-1} + 1)}{2(2^{2m-2} - 1)} = 0.$$

6 结 论

本文研究了闭环极点在指定区域的 l^1 优化设计问题. 算例表明当 m 趋于无穷时, 对应的控制器 \hat{c}_m 能使指标函数任意逼近下确界, 这和定理 3.1, 3.2 的结论吻合. 另外, 随着 m 的增加指标函数的偏差 $e = |\mu_m - \mu_0|$ 减小, 这时系统的鲁棒性增加而控制器的阶数随之提高. 对于一些具体的系统(如本文的算例), 可直接求出 m 和 e 之间的函数关系. 对一般情况可利用 CAD 系统在两者之间权衡和折衷. 对多变量系统有和本文完全相同的结论, 限于篇幅, 这里不再赘述.

参 考 文 献

- [1] Vidyasagar, M. . Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances. IEEE Trans., 1986, AC-31 (6): 527—534
- [2] Dahleh, M. A. . Pearson, J. B. . l^1 Optimal Feedback Controllers for Discrete-time Systems. Proc. ACC, Seattle, WA, June 1986. 1964—1986
- [3] Dahleh, M. A. . Pearson, J. B. . l^1 Optimal Feedback Controllers for MIMO Discrete-time Systems. IEEE Trans., 1987.

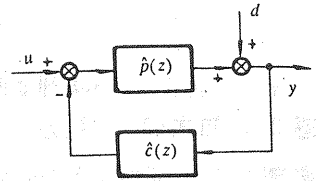


图 2 输出端有扰动的反馈系统

AC-32 (4): 314—322

- [4] Dahleh, M. A., Pearson, J. B. . Optimal Rejection of Persistent Disturbances, Robust Stability, and Mixed Sensitivity Minimization. IEEE Trans. , 1988, AC-33 (8): 722—731
- [5] Vidyasagar, M. . Control Systems Synthesis: A Factorization Approach. MIT Press, Cambridge MA, 1985
- [6] Luenberger, D. G. . Optimization by Vector Space Methods. John Wiley & Sons Inc. , New York, 1969

The l^1 Optimized Controller with Closed-Loop Poles in Assigned Region

Fang Huajing, Tu Jian

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract: In this paper, a design method of l^1 optimized controller with closed-loop poles in assigned region is presented. It has been proved that the infimum of the index function to the system with restriction on poles is the same as the one with no restriction. This ensures that the system designed by the proposed method has required dynamic property, while the capabilities of rejecting disturbance and robustness are not lost obviously. A computational procedure and example are given, which shows that the infimum of the index can be arbitrarily approached.

Key words: discrete system; optimization; computational method; pole placement

· 新 书 介 绍 ·

《神经网络理论及其在控制工程中的应用》

本书系统地介绍了神经网络的基本理论及其在控制领域中的应用。内容包括人工神经网络综述、典型网络的介绍以及神经网络的综合设计方法。在应用方面论述了基于神经网络的自适应控制、系统辨识、实时智能控制以及模式识别等。

本书参阅并引用了国内外最新资料，内容新颖，并举出大量应用实例，其中有些系作者近年来的研究成果。

本书适用于高等学校自动控制、计算机应用等专业的研究生及有关研究人员及工程技术人员。

作 者：陈燕庆 鹿浩

出版日期：1991年6月，定价：26.18元(含10%邮费)

欲订购《神经网络理论及其在控制工程中的应用》一书，请与西安市西北工业大学出版社(邮政编码：710072)联系。

联系人：柴文强

开户行：工商西安市陵园路分理处

帐 号：231—046047—52