第 8 卷 第 2 期　　控制理论与应用　　Vol. 8, No. 2
1991 年 6 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1991

奇异系统的干扰解耦

陈树中　　胡仰曾
(华东师范大学数学系，上海)　(华东化工学院自动化研究所，上海)

摘要：本文讨论利用状态反馈实现奇异系统的干扰解耦问题，提出了绝对 C-能观的概念. 利用这个概念，对 (E^T, C^T) 行满秩的奇异系统给出了干扰解耦有解的充要条件.

关键词：奇异系统；干扰解耦；绝对 C-能观

1 引　言

对于正常系统，文献[1]首先研究了干扰解耦问题. 文献[2]引入了绝对能观子系统的概念，对问题的解给出了新的充要条件. 文献[3]讨论了奇异系统的干扰解耦问题，采用的反馈中含有状态的导数，这种形式的缺点是对噪声有很大的放大，寻求由状态反馈实现奇异系统的干扰解耦是很有意义的. 文献[4]推广[2]的方法首先对这个问题作了研究，可惜结论不正确. 奇异系统能观性有几种不同定义，文献[4]采用强能观概念，这对研究干扰解耦问题是不恰当的. 本文例子表明，这是导致文献[4]的结论错误的主要原因. 另外，对奇异系统作状态反馈时可能破坏系统的正则性，因此应当寻找使闭环正则且干扰解耦的状态反馈阵，文献[4]对此未作任何讨论.

考虑线性时不变广义系统：

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \\ y = Cn. \end{cases} \tag{1}$$

其中，$x \in R^n, u \in R^m, v \in R^r, y \in R^l$ 分别是广义状态，可控输入，不可测输入和输出，$A-sE$ 是正则束.

定义 1　系统(1)称为干扰解耦的，若 $C(A-sE)^{-1}D \equiv 0$.

我们的问题是在什么条件下存在反馈

$$u = Kx, \tag{2}$$

使得 $A+BK-sE$ 是正则束且闭环是干扰解耦的. 当 K 存在时称(1)是干扰可解耦的.

为方便起见，系统(1)用 $(C,(E,A),B,D)$ 或下面的系统矩阵表示

$$\begin{pmatrix} A-sE & B & D \\ C & & \end{pmatrix}.$$

文献[4]在推导主要结论时用了下面断言：若(1)中 $(C,(E,A))$ 是强能观对，$C(A-sE)^{-1}D \equiv 0$，则 $D=0$. 下述例子说明这个断言是不正确的.

例　1

本文于1989年5月19日收到. 1990年1月13日收到修改稿.

$$A=I_5,\ E=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

直接验证知$(C,(E,A))$强能观，$C(A-sE)^{-1}D\equiv 0$. 进一步，$(C,(E,A),B)$也是绝对强能观的[4]，这表明文献[4]中的定理是错误的.

为叙述方便，下面我们规定：$SC(A)$表示矩阵A的列向量张成的空间；除非特别声明，多项式矩阵的秩指有理函数域上的秩.

2 绝对 C-能观子系统

定义 2 奇异系统$(C,(E,A))$称为C-能观，若 1)(E^T,C^T)行满秩. 2)$((A-sE)^T,C^T)$对一切有穷s行满秩.

系统(1)中让$B=0$，利用受限等价变换可化为下面形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=A_1x_1+D_1v,\\E_2\dot{x}_2&=x_2+D_2v,\\y&=C_1x_1+C_2x_2.\end{aligned}\tag{3}$$

其中，E_2是幂零阵.

引理 1 在(3)中，若(C_1,A_1)和(C_2,E_2)在正常系统意义下是能观对，则$C(A-sE)^{-1}D\equiv 0$的充要条件是$D=0$.

证 充分性是显然的. 由于$C(A-sE)^{-1}D=C_1(A_1-sI)^{-1}D_1+C_2(I-sE_2)^{-1}D_2\equiv 0$，由$E_2$是幂零阵知$C_1(A_1-sI)^{-1}D_1\equiv 0$，$C_2(I-sE_2)^{-1}D_2\equiv 0$，让$\mu=1/s$则$C_2(I-sE_2)^{-1}D_2=\mu C_2(\mu I-E_2)^{-1}D_2\equiv 0$. 按引理条件，$D_1=0$，$D_2=0$，必要性成立.

引理 2 $(C,(E,A))$是C—能观的充要条件是它的受限等价系统(3)中(C_1,A_1)，(C_2,E_2)在正常系统意义下是能观对.

证 因为C-能观是C-能控的形式对偶，结论可由文献[5]的定理 4 和 7 直接得到.

定义 3 若系统$(C,(E,A),B)$有形式

$$\left(\begin{array}{c:c}A-sE&B\\ \hdashline C&\end{array}\right)=\left[\begin{array}{cc:c}A_{22}-sE_{22}&A_{21}-sE_{21}&B_2\\A_{12}-sE_{12}&A_{11}-sE_{11}&B_1\\ \hdashline 0&C_1&\end{array}\right].\tag{4}$$

其中，A_{ii}，$i\in(1,2)$是方阵，若对任意适当维数的K_1，子系统

$$\left[\begin{array}{c}A_{11}+B_1K_1-sE_{11}\\ \hdashline C_1\end{array}\right]$$

总是C-能观，则称$(C_1,(E_{11},A_{11}),B_1)$是(4)的绝对$C$-能观子系统. 进一步，若$E_{12}=0$，$SC(A_{12})\subset I_mB_1$，$\mathrm{ramk}B=\mathrm{rank}B_1+\mathrm{rank}B_2$，则称为规范绝对$C$-能观子系统.

注 1) 一个系统可能有很多绝对C-能观子系统，其中维数最大者称为极大绝对C-能观子系统. 对正常系统，规范绝对能观子系统必定是极大绝对能观子系统，但对奇异系统，规范绝对C-能观子系统，维数不一定最大.（见例 2）

命题 1[2] 设(C,A,B)是正常系统，利用坐标变换可化成下面形式

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & \end{array}\right)=\left[\begin{array}{cccccc:c} A_{\mu+1\mu+1} & \times & \times & \cdots & & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{\mu+1}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\A_{\mu\mu+1}\end{pmatrix} & A_{\mu\mu} & \times & & & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{\mu}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\A_{\mu-1\mu+1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C_{\mu\mu}\\\times\end{pmatrix} & A_{\mu-1\mu-1} & & & & \begin{pmatrix}0\\B_{\mu-1}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\A_{\mu-2\mu+1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C_{\mu-1\mu-1}\\\times\end{pmatrix} & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & A_{33} & \times & \times & \\ \begin{pmatrix}0\\A_{2\mu+1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}C_{33}\\\times\end{pmatrix} & A_{22} & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{2}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\A_{1\mu+1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}0\\\times\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}C_{22}\\\times\end{pmatrix} & A_{11} & \begin{pmatrix}0\\B_{1}\end{pmatrix} \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{11} & \end{array}\right],$$

或简记为

$$\left[\begin{array}{cc:c} A_{\mu+1\ \mu+1} & \times & \begin{pmatrix}0\\B_{\mu+1}\end{pmatrix} \\ \overline{A}_{12} & \overline{A}_{11} & \overline{B}_{1} \\ \hdashline 0 & \overline{C}_{1} & \end{array}\right]. \tag{5}$$

其中，$C_{ii}, i\in(1,\cdots,\mu)$是列满秩矩阵，$B_i, i\in(1,\cdots,\mu+1)$是行满秩矩阵，$B_1,\cdots,B_{\mu+1}$的行线性独立，因此$SC(\overline{A}_{12})\subset I_m\overline{B}_1$.

由于状态反馈不影响C_{ii}，所以$(\overline{C}_1,\overline{A}_{11},\overline{B}_1)$是绝对能观子系统[2]，显然，$(\overline{C}_1,(I,\overline{A}_{11}),\overline{B}_1)$是规范绝对$C$-能观子系统. 现在假定系统(1)满足下面条件

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\C\end{pmatrix}=n. \tag{6}$$

定理 1 利用受限等价变换，系统(1)可变换成下面形式

$$\left(\begin{array}{c:cc} A-sE & B & D \\ \hdashline C & & \end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{cc:cc} A_{22}-sI & A_{21} & B_2 & D_2 \\ A_{12} & A_{11}-sE_{11} & B_1 & D_1 \\ \hdashline 0 & C_1 & & \end{array}\right]. \tag{7}$$

其中，$(C_1(E_{11},A_{11}),B_1)$是规范绝对C-能观子系统，符号～表示在受限变换下等价.

证 我们给出具体的算法.

第一步：由列变换将C化为$(0,C_1')$，C_1'列满秩.

$$\left(\begin{array}{c:cc} A-sE & B & D \\ \hdashline C & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc:cc} A_2-sE_2 & A_1-sE_1 & B & D \\ \hdashline 0 & C_1' & & \end{array}\right).$$

第二步：由条件(6)，E_2列满秩. 由行变换将E_2化成$(I\quad 0)^T$

$$\left(\begin{array}{c:cc} A-sE & B & D \\ \hdashline C & & \end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{cc:cc} \overline{A}_{22}-sI & \overline{A}_{21}-s\overline{E}_{21} & \overline{B}_2 & \overline{D}_2 \\ \overline{A}_{12} & \overline{A}_{11}-s\overline{E}_{11} & \overline{B}_1 & \overline{D}_1 \\ \hdashline 0 & C_1' & & \end{array}\right].$$

第三步：利用行变换将 $\bar{B}_1$ 化成 $\begin{pmatrix} 0 \\ B'_1 \end{pmatrix}$，$\bar{B}_2$ 化成 B'_2，其中 B'_1 行满秩，且

$$\operatorname{rank}B'_1 + \operatorname{rank}B'_2 = \operatorname{rank}B. \tag{8}$$

再由列变换消去 $\bar{E}_{21}$.

$$\left(\begin{array}{c:cc} A - sE & B & D \\ \hdashline C & & \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cc:cc} A'_{22} - sI & A'_{21} & B'_2 & D'_2 \\ \begin{pmatrix} A'_{12} \\ \times \end{pmatrix} & A'_{11} - sE'_{11} & \begin{pmatrix} 0 \\ B'_1 \end{pmatrix} & D'_1 \\ \hdashline 0 & C'_1 & & \end{array}\right]. \tag{9}$$

第四步：(9)中的 A'_{12} 不受状态反馈的影响，(A'_{12}, A'_{22}, B'_2) 是正常系统，将它化成形式(5)

$$\left(\begin{array}{c:cc} A - sE & B & D \\ \hdashline C & & \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc:cc} A''_{33} - sI & A''_{32} & A''_{31} & B''_3 & D''_3 \\ A''_{23} & A''_{22} - sI & A''_{21} & B''_2 & D''_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A''_{12} \\ \tilde{A}_{12} \end{pmatrix} & A'_{11} - sE'_{11} & \begin{pmatrix} 0 \\ B'_1 \end{pmatrix} & D'_1 \\ \hdashline 0 & 0 & C'_1 & & \end{array}\right]. \tag{10}$$

其中，$(A''_{12}, A''_{22}, B''_2)$ 相应于(5)中的 $(\bar{C}_1, \bar{A}_{11}, \bar{B}_1)$，它是绝对能观子系统[2]. A''_{23} 相应于(5)中的 $\bar{A}_{12}$，由(8)和(5)中 B_i 的性质知

$$\operatorname{rank}B'_1 + \operatorname{rank}B''_2 + \operatorname{rank}B''_3 = \operatorname{rank}B, \tag{11}$$

$$SC\begin{pmatrix} A''_{23} \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} \subset I_m\begin{pmatrix} B''_2 \\ B'_1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

记

$$\left(\begin{array}{c:c} A_{11} - sE_{11} & B_1 \\ \hdashline C & \end{array}\right) = \left[\begin{array}{cc:c} A''_{22} - sI & A''_{21} & B''_2 \\ \begin{pmatrix} A''_{12} \\ \tilde{A}_{12} \end{pmatrix} & A'_{11} - sE'_{11} & \begin{pmatrix} 0 \\ B'_1 \end{pmatrix} \\ \hdashline 0 & C'_1 & \end{array}\right],$$

$$A_{12} = \left[\begin{array}{c} A''_{23} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} \end{array}\right]. \tag{13}$$

显然 $(C_1, (E_{11}, A_{11}), B_1)$ 是规范绝对 C-能观子系统，定理成立.

引理 3　若(7)中 $A_{12} \neq 0$，从 (A_{12}, A_{22}) 中分解出能观部分 (A'_{12}, A'_{22})

$$\left(\begin{array}{c:c} A - sE & D \\ \hdashline C & \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc:c} \times & \times & \times & \times \\ 0 & A'_{22} - sI & A'_{21} & D'_2 \\ 0 & A'_{12} & A_{11} - sE_{11} & D_1 \\ \hdashline 0 & 0 & C_1 & \end{array}\right]. \tag{14}$$

则子系统

$$\left[\begin{array}{cc:c} A'_{22} - sI & A'_{21} & D'_2 \\ A'_{12} & A_{11} - sE_{11} & D_1 \\ \hdashline 0 & C_1 & \end{array}\right] \tag{15}$$

是 C-能观子系统.

证 由(13)和 C_1' 列满秩，为了证明(15)是 C-能观系统，只要证

$$\begin{pmatrix} A_{22}' - sI & \times \\ A_{12}' & \begin{pmatrix} A_{22}'' - sI \\ A_{12}'' \\ \tilde{A}_{12} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

对一切有穷 s 列满秩. 注意到 A_{12}'', A_{22}'' 有(5)中 $\bar{C}_1, \bar{A}_{11}$ 的形式，A_{12}' 中的非零元和(5)中的 C_{ii}，$i\in(1,\cdots,\mu)$ 并不位在同样的块行中，结论即得.

3 问题的解

引理 4 设矩阵束 (A_1, A_2-sE_2, B) 中，A_2 是方矩阵，$SC(A_1)\subset I_mB$. $(A_1 \quad A_2-sE_2)$ 行满秩，则存在 K_1K_2，使 $A_1+BK_1=0$，$A_2+BK_2-sE_2$ 是正则束.

证 利用行初等变换

$$(A_1 \quad A_2 - sE_2 \quad B) \sim \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} - sE_{11} & B_1 \\ 0 & A_{21} - sE_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，B_1 行满秩. 由 $(A_1 \quad A_2-sE_2)$ 行满秩知，$A_{21}-sE_{21}$ 亦行满秩，所以有下面的 Kronecker 规范型

$$A_{21} - sE_{21} = \text{block diag}(L_{\mu1}, L_{\mu2}, \cdots, L_{\mu r}, A_0 - sE_0).$$

其中，A_0-sE_0 是正则束，L_μ 是 $\mu\times(\mu+1)$ 矩阵，有形式

$$L_\mu = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & s & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & s \end{bmatrix}.$$

利用列交换 $$(A_1 \quad A_2 - sE_2 \quad B) \sim \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11}' - sE_{11}' & A_{12}' - sE_{12}' & B_1 \\ 0 & Q & N & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \text{block diag}(N_{\mu1}, N_{\mu2}, \cdots, N_{\mu r}, A_0 - sE_0).$$

其中，Q 是 L_μ 中第一列排列得到的常数矩阵，N_μ 是 L_μ 中删去第一列后得到的 $\mu\times\mu$ 多项式矩阵.

由于 B_1 行满秩，所以可取矩阵 K_1, K_2 和实数 q 满足

$$A_{10} + B_1K_1 = 0, (A_{11}' - sE_{11}' \quad A_{12}' - sE_{12}') + B_1K_2 = (qI - sE_{11}' - sE_{12}').$$

注意到 N_μ 的形式，若取 q 是够大即知 $A_2+BK_2-sE_2$ 是正则束.

定理 2 假定系统(1)满足条件(6)，则它是干扰可解耦的充要条件是它的受限等价系统(7)中的 $D_1=0$.

证 因为系统传递函数在受限等价变换下不变，不失一般可设系统(1)有形式(7).

充分性：因为 $A-sE$ 是正则束，所以(7)中的 $(A_{12}, A_{11}-sE_{11})$ 行满秩，由 $SC(A_{12})\subset I_mB_1$ 及引理(4)，存在 $K=(K_1, K_2)$ 使得 $A_{12}+B_1K_1=0$，$A_{11}+B_1K_2-sE_{11}$ 是正则束，因此 $A+BK-sE$ 是正则束，并且有 $C(A+BK-sE)^{-1}D\equiv 0$.

必要性：设(7)中矩阵是经状态反馈后的闭环阵，由于 $(C_1, (E_{11}, A_{11}), B_1)$ 是绝对 C-能观子系统，经状态反馈后仍是 C-能观，因此若 $A_{12}=0$，由引理 1 和 2 知 $D_1=0$，若 $A_{12}\neq 0$，

由引理 3，闭环系统的 C-能观子系统在 $(C_1,(E_{11},A_{11}))$ 基础上扩大，即为(15)式，再由引理 1 和 2 知 $D_1=0$，定理成立.

下面例子说明，条件(6)不成立时定理 2 不真.

例 2

$$\left(\begin{array}{c|cc} A-sE & B & D \\ \hline C & & \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

其中等价系统由第一行加到第四行得到. 直接计算传递函数知 $C(A-sE)^{-1}D\equiv 0$，$\text{rank}(E^T, C^T)=4<5$，不满足条件(6). 两个用虚线表示的子系统都是规范绝对 C-能观子系统，但对前者，$D_1=(1\quad 0)^T\neq 0$，因此(6)不成立时定理 2 不真. 进一步，前者维数为 2，后者是 4，因此对一般奇异系统，规范绝对 C-能观子系统不一定是维数最大者.

参 考 文 献

[1] Wonham, W. M., Morse, A. S.. Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach. SIAM J. Control, 1970, 8(1): 1—18

[2] 韩京清, 许可康. 用状态反馈实现稳定的抗干扰性. 中国科学(A 辑), 1982, 10: 945—950

[3] Zhou, Z., Shayman, M. A. and Tarn, T. J.. Singular Systems: A New Approach in the Time Domain. IEEE, 1987, AC—32 (1): 42—50

[4] Xu, K. K.. Realization of Disturbance Resistance of A Generalized State System by Static Feedback. Preprints of the IFAC 9th World Congress, VIII, 105—109

[5] Yip, E., Sincovec, R. F.. Solvability, Controllability and Observability of Continuous Discriptor Systems. IEEE, 1981, AC—26(3): 702—707

Disturbance Decoupling for Singular Systems

Chen Shuzhong

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai)

Hu Yangzeng

(Institute of Automation, East China University of Chemical Technology, Shanghai)

Abstract: In this paper we discuss the disturbance decoupling problem by state feedback for singular systems. The concept of absolute C-observable subsystem is presented, by use of this concept the necessary and sufficient condition for the disturbance decoupling problem for singular systems which satisfy that (E^T, C^T) has full row rank is given.

Key words: singular system; disturbance decoupling; absolute C-observability