第 8 卷 第 2 期
1991 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 2
June, 1991

动态扩张算法的一个性质*

夏小华　高为炳
(北京航空航天大学第七研究室)

摘要：动态扩张算法在控制系统的动态反馈综合问题以及结构分析问题上都有着重要的应用. 本文证明动态扩张算法的一个有趣的性质：由动态扩张算法所得到的扩张系统，不依赖于我们怎样施行该算法. 本文还指出这个结论与几个非线性控制系统的分析和设计问题的联系.

关键词：动态扩张；动态状态反馈；T-等价性；约化逆；零动态

1 引言及结论

考虑由下列方程描述的系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \tag{1a}$$

$$y = h(x) = [h_1(x), \cdots h_p(x)]^T. \tag{1b}$$

其中，为简单记，$x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^m$，$y(t) \in R^p$，$f(x)$，$g_1(x)$，$\cdots$，$g_m(x)$，$h_1(x)$，$\cdots$，$h_p(x)$是 x 的亚纯函数，即，它们是 x 的解析函数球的分裂域中的元素. 整个理论都是局部的，所以在后面，矩阵的秩等等都指的是正则点的某个邻域上的秩等等.

对于这样的系统，下面的算法就是所谓的动态扩张算法.

初始化：$k := 0$，　$D_1 := \underline{p} := \{1, \cdots, p,\}$，　$D_2 := \cdots = D_n := \Phi$(空集)；　$v := 0$.

第一步　对于 $i \in Dj$，计算

$$y_i^{(j)} = a_i + b_j u. \tag{2}$$

记

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad \rho = \mathrm{rank}(b). \tag{3}$$

若 $k > n$ 或 $\rho = p$，那么令 $v^* = v$，停止！

第二步　作正则静态状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{4}$$

(即 β 非奇)使得所得到的闭环系统(记为$\sum_c$)满足

$$y_i^{(j)} = a_i^c + b_i^c v, \quad i \in D_j.$$

其中，

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1989年8月29日收到. 1990年4月12日收到修改稿.

$$b^c := \begin{bmatrix} b_1^c \\ \vdots \\ b_p^c \end{bmatrix} = [\xi \quad 0], \tag{5}$$

而 ξ 是一个 $p\times\rho$ 矩阵，且在其中有 ρ 行(比方说，第 $r_1,\cdots,r_\rho$ 行)构成一单位矩阵 I_ρ，并且相应地，$a_i^c=0$，　$i=r_1,\cdots,r_\rho$.

第三步　b^c 的前 ρ 列不为零. 假设在这前 ρ 列中有 q 列(比如说，第 $i_1,\cdots,i_q$ 列)具有两个以上的非零元素，不妨设 $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant\rho$.

现在，在 q 个相应的输入端加积分器，即，考虑下面的定义在 $R^n\times R^q$ 的系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}(x) + \sum\limits_{j\in\pi}\tilde{g}_j(x)z_j \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum\limits_{j\in\bar{\pi}}\tilde{g}_j(x)v_j \\ v_l \end{bmatrix}, \quad l\in\pi \tag{6a, 6b}$$

$$y = h(x). \tag{6c}$$

其中，$\tilde{f}(x)=f(x)+g(x)\alpha(x)$，$\tilde{g}(x)=g(x)\beta(x)$，$\pi=\{i_1,\cdots,i_q\}$，$\bar{\pi}$ 是 π 在 $\underline{m}$ 中的补集，$\bar{\pi}=\underline{m}\backslash\pi$. 称这个系统为 $\sum_{k+1}$，而系统(1)称为 $\sum_0$.

第四步　设 $\Pi=\pi\cup(\underline{p}\backslash\{r_1,\cdots,r_\rho\})$.

令　$D_1:=D_1\backslash\Pi$，$D_j:=(D_j\backslash\Pi)\cup(D^{j-1}\cap\Pi)$，$j=2,\cdots,n$.

令　$v:=v+q$，$k:=k+1$. 到第一步，重复.

算法的第一步到第四步称为一轮.

自从 1970 年由 Wang[1]为研究线性时不变系统的动态解耦问题而引入起，特别是在文[2]为解决非线性系统的动态解耦问题作的推广之后，动态扩张算法已被证明是解决许多控制系统的分析和综合问题的有效工具. 例如，文[3][4]用它来计算非线性系统的秩(不变量)；文[5]证明对于可动态解耦的非线性系统，动态扩张算法可以给出一个最小阶的解耦动态反馈；也正是由于这个算法的启发，我们在文[6](另可见[7][8])，提出了非线性系统的本性结构概念，解决了最小阶动态 I/O 线性化问题.

在本文，我们将得到动态扩张算法的一个有趣的性质. 我们证明由算法所最后得到的扩张系统不依赖于我们怎样在第二步选取静态反馈. 即，我们的主要结论是：

定理　在任意一轮 k，第二步对系统 $\sum_k$ 所选取的两个不同的静态反馈在下轮所得到的两个扩张系统 $\sum_{k+1}$ 是 T-等价的.

T-等价性概念是[9]中所提出的，我们在下一节定理的证明中也要给出解释.

有很好的理由说明这个结论的重要性.

首先，我们在文[5]中解决最小阶动态解耦时，需要证明事实：动态扩张算法中出现的整数 ρ_k 和 q_k 是系统所固有的. 显然，这里的定理隐含了这个事实.

其次，我们知道，对方的可逆的非线性系统，文[10](同样[11])用 Singh 的逆系统算法所定义的约化逆系统在数学上是不严格的[12]. 而约化逆的概念和性质又是重要的(参见我们在文[8]中对约化逆的处理及在动态完全线性化问题中的应用). 有了这里的结论，非线性系统(方的、可逆的)的约化逆显然可以定义为动态扩张算法的最后一轮 $k^*(\leqslant n)$[3] 所得到的扩张系统的约化逆. 因为，这时这个扩张系统是静态可解耦的[5]，其约化逆可以

用显然的方法定义.

再次,非线性系统的约化逆的约化逆零动态是很有用的[10,11],而同样,非线性系统的约化逆零动态的严格的数学定义也是没有的.因此,这里的结论也可以用来给出这样的一个定义.

我们在下一节结出这个定理的证明.

2 定理的证明

我们只需要对第一轮进行证明.

不失一般性,我们可以假设 $b(x)$ 的前 ρ 行线性独立,而在第二步选定的正则静状态反馈(4)使得

$$b(x)\beta(x) = \begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ \lambda(x) & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

$$a(x) + b(x)\alpha(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(x) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

其中,
$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{\rho+1} \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\rho+1} \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\rho+1,1} & \cdots & \lambda_{\rho+1,\rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{p,1} & \cdots & \lambda_{p,\rho} \end{bmatrix}.$$

记
$$a = \begin{bmatrix} a^1 \\ \hline \bar{a}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\rho \\ \hline a_{\rho+1} \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ \hline \bar{b}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_\rho \\ \hline b_{\rho+1} \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix},$$

那么由(7)和(8)
$$\bar{b}^1(x) = \lambda(x)b^1(x), \tag{9}$$
$$\bar{a}^1(x) - \lambda(x)a^1(x) = \mu(x). \tag{10}$$

首先,可看出,静态反馈不同的选取无外乎下面两种情况:

1) 可选取不同的 α 和 β 满足(7)和(8);

2) 可另外选 ρ 个线性独立行,再作适当的静态反馈.

先考虑第一种情况.设 $u=\alpha'(x)+\beta'(x)v'$ 是另一个满足(7)和(8)的反馈,其中 λ 和 μ 分别变为 λ' 和 μ',由(9)和(10)易知 $\lambda'=\lambda,\mu'=\mu$.由 ρ,q,π 的定义可知它们都是不变的.

设相应于 $u=\alpha'(x)+\beta'(x)v'$ 的系统(6)是 $\sum_1'$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}' \\ \dot{z}'_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}'(x') + \sum_{j\in\pi}\tilde{g}'_j(x')z'_j \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j\in\bar{\pi}}\tilde{g}'_j(x')v'_j \\ v'_l \end{bmatrix}, \quad l\in\pi \tag{11a, 11b}$$

$$y = h(x). \tag{11c}$$

其中,$\tilde{f}'(x)=f(x)+g(x)\alpha'(x)$,$\tilde{g}'(x)=g(x)\beta'(x)$,我们要证 $\sum_1'$ 和 $\sum_1$ 是 T-等价的,即,存在正则静态状态反馈

$$v = \alpha^0(x,z) + \beta^0(x,z)v' \tag{12}$$

和正则状态变换

$$(x,z)=T(x',z'),\tag{13}$$

使得 $\sum$ 变换为 $\sum_1'$.

由(7)式，易证明一定存在适当维数的矩阵 $\beta^{21}(x)$，$\beta^{22}(x)$ 且 $\beta^{22}(x)$ 是非奇方阵，使得

$$\beta'(x)=\beta(x)\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}.\tag{14}$$

同理，由(7)(8)式，可推出 $\alpha(x)$ 和 $\alpha'(x)$ 之间的关系.

$$\alpha'(x)=\alpha(x)+\beta(x)\begin{bmatrix} 0_{\rho\times 1} \\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}.$$

其中 $\alpha^2(x)$ 是某个 $(m-\rho)$ 维向量.

另一方面，(6a)的右端简记为 $\tilde{f}+\tilde{g}\begin{bmatrix} Z \\ V^2\end{bmatrix}$，其中 Z 是一个 ρ 维向量，其分量 $Z_i=z_i$，对 $i\in\pi$，$Z_i=v_i$，对 $i\in\rho\backslash\pi$；而 V^2 表示向量 $(v_{\rho+1},\cdots,v_p)^T$. 那么易算出

$$\tilde{f}+\tilde{g}\begin{bmatrix} Z \\ V^2\end{bmatrix}=\tilde{f}'+\tilde{g}'\left(\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} Z \\ V^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2\end{bmatrix}\right)\right).$$

由此，不难看出，在反馈

$$v=\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2(x)+\hat{\beta}^{21}(x)z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} I_\rho & 0 \\ \bar{\beta}^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}v',\tag{15}$$

其中 $\hat{\beta}^{21}(x)$ 是一个 $(m-\rho)\times q$ 矩阵，其第 k 列为 $\beta^{21}(x)$ 的第 i_k 列；$\bar{\beta}^{21}(x)$ 是一个 $(m-\rho)\times\rho$ 矩阵，它是通过将 $\beta^{21}(x)$ 的第 $i_1,\cdots,i_q$ 行变为零所得到的，而 $z=(z_{i_1},\cdots,z_{i_q})^T$，以及变换

$$x=x',z=z'\tag{16}$$

的作用下，系统 $\sum_1$ 变为 $\sum_1'$. 即 $\sum_1$ 与 $\sum_1'$ 是T-等价的.

再考虑情形 2).

为简单记，假设矩阵 $b(x)$ 的前 $\rho-1$ 行和第 $\rho+1$ 行也构成一组最大线性独立组，且在第二步施行另一个静态反馈 $u'=\alpha'(x)+\beta'(x)v'$ 使得

$$b(x)\beta'(x)=\begin{bmatrix} [I_{\rho-1}] & 0 \\ \lambda_\rho'(x) & 0 \\ 0\quad 1 & 0 \\ \lambda_{\rho+2}'(x) & 0 \\ \vdots & \\ \lambda_p'(x) & 0\end{bmatrix},\quad \alpha(x)+b(x)\alpha'(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_\rho'(x) \\ 0 \\ \mu_{\rho+2}'(x) \\ \vdots \\ \mu_p'(x)\end{bmatrix}.$$

此时，由于 $\{b_1(x),\cdots,b_\rho(x)\}$ 和 $\{b_1(x),\cdots,b_{\rho-1}(x),\ b_{\rho+1}(x)\}$ 都是矩阵 $b(x)$ 的最大线性独立组，由(9)式，必然有 $\lambda_{\rho+1,\rho}(x)\neq 0$. 同时，类似于(9)(10)，我们有

$$\begin{bmatrix} b_\rho(x) \\ b_{\rho+2}(x) \\ \vdots \\ b_p(x)\end{bmatrix}=\lambda'(x)\begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_{\rho-1}(x) \\ \vdots \\ b_{\rho+1}(x)\end{bmatrix},\tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} a_\rho(x) \\ a_{\rho+2}(x) \\ \vdots \\ a_p(x) \end{bmatrix} - \lambda'(x) \begin{bmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_{\rho-1}(x) \\ \vdots \\ a_{\rho+1}(x) \end{bmatrix} = \mu'(x). \tag{18}$$

其中，

$$\lambda' = \begin{bmatrix} \lambda'_\rho \\ \lambda'_{\rho+1} \\ \vdots \\ \lambda'_p \end{bmatrix}, \quad \mu' = \begin{bmatrix} \mu'_\rho \\ \mu'_{\rho+1} \\ \vdots \\ \mu'_p \end{bmatrix}. \tag{19}$$

由(9)，(10)，(18)及(19)，不难得到下面的关系.

$$\lambda' = \begin{bmatrix} -\dfrac{\lambda_{\rho+1,1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \cdots & -\dfrac{\lambda_{\rho+1,\rho-1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \dfrac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \\ \lambda_{\rho+2,1} - \dfrac{\lambda_{\rho+2,\rho}\lambda_{\rho+1,1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \cdots & \lambda_{\rho+2,\rho-1} - \dfrac{\lambda_{\rho+2,\rho}\lambda_{\rho+1,\rho-1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \dfrac{\lambda_{\rho+2,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ \lambda_{p,1} - \dfrac{\lambda_{p,\rho}\lambda_{\rho+1,1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \cdots & \lambda_{p,\rho-1} - \dfrac{\lambda_{p,\rho}\lambda_{\rho+1,\rho-1}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & \dfrac{\lambda_{p,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \end{bmatrix}$$

$$= T\lambda + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 + \dfrac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\lambda_{\rho+2,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\lambda_{p,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\mu' = T\mu.$$

其中，

$$T = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{\lambda_{\rho+2,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{\lambda_{p,\rho}}{\lambda_{\rho+1,\rho}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

由 q 和 π 的定义知，q 是矩阵 λ 的不为零的列数，而 π 是这些不为零列的列下标. 由(20)式不难看出，λ 和 λ' 具有相同个数的非零列，且它们的列下标是一致的. 因此，反馈 $u=\alpha'(x)+\beta'(x)v'$ 不影响 q 和 π.

同样，设施行反馈 $u=\alpha'(x)+\beta'(x)v'$ 所得到的系统形如(11)，我们要证 $\sum'_1$ 和 $\sum_1$ 是T-等价的.

首先，同样地，我们可得到 $\beta'(x)$ 和 $\beta(x)$，$\alpha'(x)$ 和 $\alpha(x)$ 之间的关系式如下：

$$\beta'(x) = \beta(x)\begin{bmatrix} [I_{\rho-1}0] & 0 \\ \lambda'_\rho(x) & 0 \\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\alpha'(x)=\alpha(x)+\beta(x)\begin{bmatrix}0\\ -(\mu_{\rho+1}(x)/\lambda_{\rho+1,1}(x))\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}=\alpha(x)+\beta(x)\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}. \tag{23}$$

类似地，记(6a)右端为 $\tilde{f}+\tilde{g}\begin{bmatrix}Z\\ \\ V^2\end{bmatrix}$，那么

$$\tilde{f}+\tilde{g}\begin{bmatrix}Z\\ \\ V^2\end{bmatrix}=f+g\alpha+g\beta\begin{bmatrix}Z\\ \\ V^2\end{bmatrix}=f+g\alpha'-g\beta\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}+g\beta\begin{bmatrix}Z\\ V^2\end{bmatrix}$$

$$=f'+g'\begin{bmatrix}[I_{\rho-1}0] & 0\\ \lambda'_\rho(x) & 0\\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}^{-1}\left(-\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z\\ V^2\end{bmatrix}\right).$$

由此，如果令 $x'=x$ 且有一变换 $z=T_2(z')$ 和反馈(12)使得 $\sum_1$ 与 $\sum'_1$T-等价，那么一定有

$$\begin{bmatrix}[I_{\rho-1}\quad 0] & 0\\ \lambda'_\rho(x) & 0\\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}^{-1}\left(-\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Z\\ V^2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}Z'\\ (V')^2\end{bmatrix}, \tag{24}$$

即
$$\begin{bmatrix}Z\\ V^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\\ \alpha^2(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[I_{\rho-1}\quad 0] & 0\\ \lambda'_\rho(x) & 0\\ \beta^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z'\\ (V')^2\end{bmatrix}. \tag{25}$$

其中，Z' 与 Z 一样，表示一个 ρ 维向量，其分量 $Z'_i=z'_i,i\in\pi,Z'_i=v_i,i\in\underline{\rho}\backslash\pi,(V')^2$ 与 V^2 类似，是相应于 v' 的记号.

由此，我们反过来考虑就知在正则变换

$$x=x' \tag{26}$$

$$z=\begin{bmatrix}I_{q-1} & 0\\ \hat{\lambda}'_\rho(x)\end{bmatrix}Z'+\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\end{bmatrix}. \tag{27}$$

其中，$\hat{\lambda}'_\rho(x)$ 是由 $\lambda'_\rho(x)$ 的第 $i_1,\cdots,i_q$ 个分量所排列起来的一个 q 维行向量，以及正则状态反馈

$$v=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{\lambda_{\rho+1,1}}\overline{L_{\tilde{f}'+\tilde{g}'_n}}(\mu_\rho+\tilde{\lambda}_\rho\quad z)\left(\begin{bmatrix}0\\ \mu_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I_{q-1} & 0\\ \hat{\lambda}_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}z\right)\\ \alpha^2(x)+\hat{\beta}^{21}(x)\begin{bmatrix}0\\ \mu_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}+\hat{\beta}^{21}(x)\begin{bmatrix}I_{q-1} & 0\\ \hat{\lambda}_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}z\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}[I_{\rho-1}\quad 0] & 0\\ \lambda'_\rho-(1/\lambda_{\rho+1,1})\overline{Lg'^1}(\mu_{\rho+1}(x)+\hat{\lambda}_{\rho+1}(x)z & -(1/\lambda_{\rho+1,1}L\bar{g}'^2(\mu_{\rho+1}(x)+\hat{\lambda}_{\rho+1}(x)z)\\ \bar{\beta}^{21}(x) & \beta^{22}(x)\end{bmatrix}v'. \tag{28}$$

其中，$\tilde{g}_1=(\tilde{g}'_1,\cdots,\tilde{g}'_\rho)$，$\tilde{g}'^2=(\tilde{g}'_{\rho+1},\cdots,\tilde{g}'_m)$，$\tilde{g}'_\pi=(\tilde{g}'_{i1},\cdots,\tilde{g}'_{iq})$，$\hat{\lambda}_{\rho+1}(x)$是由 $\lambda_{\rho+1}(x)$的第 i_1，$\cdots$，i_q 个分量所排列起来的一个 q 维向量，$\overline{L_{\tilde{g}'^1}}(\mu_{\rho+1}(x)+\hat{\lambda}_{\rho+1}(x)z)$表示把矩阵$\overline{L_{\tilde{g}'^1}}(\mu_{\rho+1}(x)+\hat{\lambda}_{\rho+1}(x)z)$的第 $i_1,\cdots,i_q$ 列换为零所得到的一个矩阵，$\bar{\beta}^{21}(x)$和 $\hat{\beta}^{21}(x)$与式(16)中的意义相同的作用下，系统 $\sum_1$ 变为 $\sum'_1$.

事实上，变换(27)的逆是

$$z' = \begin{bmatrix}[I_{q-1}\quad 0]\\ \hat{\lambda}_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\ \mu_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}. \tag{29}$$

而由(28)知，

$$\begin{aligned}V^2 &=\bar{\beta}^{21}(x)(V')^1+\beta^{22}(x)(V')^2+\alpha^2(x)\\&\quad+\hat{\beta}^{21}(x)\left(\begin{bmatrix}0\\ \mu_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I_{q-1}\quad 0\\ \hat{\lambda}_{\rho+1}(x)\end{bmatrix}z\right)\\&=\bar{\beta}^{21}(x)(V')^1+\beta^{22}(x)(V')^2+\alpha^2(x)+\hat{\beta}^{21}(x)z'\\&=\beta^{21}(x)Z'+\beta^{22}(x)(V')^2+\alpha^2(x).\end{aligned}$$

上述推导及(27)式可得(25)式. 因此，在状态变换(26)，(27)及反馈(28)的作用下，$\tilde{f}+\tilde{g}\begin{bmatrix}Z\\ V^2\end{bmatrix}$变为 $\tilde{f}'+\tilde{g}'\begin{bmatrix}Z'\\ V'^2\end{bmatrix}$，即，(6$a$)变为(11$a$).

为了证明在选定的变换和反馈下，(6b)变为(11b)，因为 $z_{i_k}=z'_{i_k}$，$v_{i_k}=v'_{i_k}$，$k=1,\cdots,q-1$，故，我们只需证明 $\dot{z}_{i_q}=v_{i_q}$. 变为 $\dot{z}'_{i_q}=v'_{i_q}$.

由(27)，

$$z_{iq}=\hat{\lambda}'_\rho(x)z'+\mu'_\rho(x),$$

故

$$\begin{aligned}\dot{z}_{iq}&=\hat{\lambda}'_\rho(x)\dot{z}'+L_{\tilde{f}'}[\mu'_\rho(x)+\hat{\lambda}'_\rho(x)z']\\&\quad+L_{\tilde{g}'}[\mu'_\rho(x)+\hat{\lambda}'_\rho(x)z']\begin{bmatrix}Z'\\(V')^2\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{30}$$

因为

$$\mu'_\rho=-\mu_{\rho+1}/\lambda_{\rho+1,\rho},$$

$$\hat{\lambda}'_\rho=-\hat{\lambda}_{\rho+1}/\lambda_{\rho+1,\rho}+\left(0\cdots0\quad 1+\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}\right),$$

故

$$\begin{aligned}L_{\tilde{f}'}[\mu'_\rho+\lambda'_\rho z'] &=-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z')\\&\quad-L_{\tilde{f}'}\left(1+\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}\right)z'_{i_q}-L_{\tilde{f}'}\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z')\\&=\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z')+\frac{z'_{i_q}}{\lambda^2_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}\lambda_{\rho+1,\rho}\\&\quad+\frac{(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z')}{\lambda^2_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}\lambda_{\rho+1,\rho}\\&=-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}\left(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}\left(\begin{bmatrix}[I_{q-1}0]\\ \lambda'_\rho(x)\end{bmatrix}z'+\begin{bmatrix}0\\ \mu'_\rho(x)\end{bmatrix}\right)\right)\\&=-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z).\end{aligned}$$

同理，

$$L_{\tilde{g}'}[\mu'_\rho+\lambda'_\rho z']=-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{g}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z).$$

故由(30)，

$$\dot{z}_{iq}=\hat{\lambda}'_\rho(x)\,\dot{z}'-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}}L_{\tilde{f}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} L_{\bar{g}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z)\begin{bmatrix} Z' \\ (V')^2 \end{bmatrix} \\
&=\hat{\lambda}'_{\rho}(x)\ \dot{z}'-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} L_{\bar{f}'}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z) \\
&-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} L_{\bar{g}'\pi}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z)z' \\
&-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \overline{L_{\bar{g}'}^{1}}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z)(V')^1 \\
&-\frac{1}{\lambda_{\rho+1,\rho}} \overline{L_{\hat{g}'}{}^{2}}(\mu_{\rho+1}+\hat{\lambda}_{\rho+1}z)(V')^2.
\end{aligned}
$$

由(28)，并注意到 $z'_i=v'_i=v_i, i=i_1,\cdots,i_{q-1}$，直接就会有 $\dot{z}'_{i_q}=v'_{i_q}$.

到此，我们就证明了系统 $\sum_1$ 和 $\sum'_1$ 是T-等价的.

参 考 文 献

[1] Wang, S. H.. Design of Precompensator for Decoupling Problem. Electronics Letters, 1970, 6: 739—741

[2] Descusse, J., Moog, C. H.. Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Nonlinear Systems. Int. J. Control, 1985, 42: 1387—1398

[3] Grizzle, J. W., Di Benedetto, M. D. and Moog, C. H.. Computing the Differential Output Rank of a Nonlinear System. Proc. 26th IEEE Conf. Decision and Control, 1987, 142—145

[4] Di Benedetto, M. D., Grizzle, J. W. and Moog, C. H.. Rank Invariants of Nonlinear Systems. SIAM J. Control & Optimiz., 1989, 27: 658—672

[5] 夏小华，高为炳. 非线性系统的最小阶动态解耦. 中国科学(A辑), 1989, (10): 1107—1112

[6] 夏小华. 动态扩张理论与非线性最小设计. 北京航空航天大学博士论文, 1989, 1月

[7] Xia, X. H.. The Essential Structure of Nonlinear Systems. 11th IFAC World Congress, Tallinn, USSR, Aug., 1990

[8] 夏小华，高为炳. 非线性系统的动态完全线性化. 系统科学与数学, 1990, 10(2): 149—158

[9] Hunt, L. R., Luksic, M. and Su, R.. Exact Linearization of Input-Output Systems. Int. J. Control, 1986, 43: 247—255

[10] Isidori, A., Moog, C. H.. On the Nonlinear Equivalent of the Notion of Transmission Zeros. In C. I. Byrnes and A. Kurzhanski (eds): Modelling and Adaptive Control: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 105, Springer-verlag, Berlin, 1987

[11] Isidori, A., Moog, C. H. and De Luca, A.. A Sufficient Condition Full Linearization via Dynamic State Feedback. Proc. 25th IEEE Conf. Decision and Control, 1986, 203—208

[12] Moog, C. H.. Linear Algebra and Nonlinear Control. Int. Conf. Nonlinear Control, Nantes, France, June, 1988

A Property of the Dynamic Extension Algorithm

Xia Xiaohua, Gao Weibing

(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract: This paper presents an interesting property of the dynamic extension algorithm which has bee recognized in a number of dynamic state feedback synthesis as well as in structural analysis of control systems. It is shown that the extended system obtained as a result of the algorithm is independent of the freedom chosen to perform the algorithm. The importance of this property is pointed out by giving its connections with several synthesis and analysis problems.

Key words: dynamic extension; dynamic state feedback; T-equivalence; reduced-inverse; zero dynamics