第 8 卷 第 2 期
1991 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 2
June, 1991

广义系统的能量受限的输出调节*

邹 云 杨成梧
(华东工学院八系,南京)

摘要: 本文在文[1]的工作基础上讨论了广义系统通过 MPD 反馈的能量受限的输出调节问题,得到了相应的充分条件及算法.

关键词: 奇异系统;线性系统;输出调节

1 引 言

本文是文[1]所做工作的后续,在那里我们讨论了广义系统:

$$\theta:\begin{cases}E\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Dx\end{cases}$$

的输出调节问题*通过 MPD 反馈[5]:

$$u=F(\alpha x-\dot{x}) \tag{1}$$

的可解性,并得出了相应的充要条件和算法.

这里,$E,A\in R^{n\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,$D\in R^{l\times n}$,E 为奇异阵,且 E,A 满足正则束条件:

$$\det(sE-A)\neq 0,\quad s\in C,(C\text{ 为复平面}). \tag{2}$$

而 α 为使得(2)的不等号成立的任一实数,传统意义下的输出调节问题只是要求系统经反馈控制后满足

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=0. \tag{3}$$

但由于广义系统的状态中存在脉冲模[3],而这种脉冲模对系统所受到的干扰有着极强的放大作用,所以我们还要求在输出中滤掉这些脉冲模,即要求:

$$y(t)\text{ 不含脉冲模}. \tag{4}$$

这就是我们在文[1]中所解决的问题. 在这篇文章中我们则进一步要求由(1)给出的反馈 u 满足:

$$\int_0^\infty u^T(t)Ru(t)\mathrm{d}t<\infty. \tag{5}$$

其中,$R=R^T>0$,即 R 为对称正定矩阵. 简言之,本文所要讨论的问题是,对于系统 θ 寻求满足(5)的反馈律(1)使得闭环系统:

$$\theta_0:\begin{cases}(E+BF)\dot{x}=(A+\alpha BF)x,\\ y=Dx\end{cases}$$

的输出 $y(t)$ 满足(3)和(4). 从控制系统的设计来看,(5)中的积分可作为进行预定目标的

* [1]中将该问题称为输出稳定化问题(简称 GOSP).

本文于1989年1月16日收到. 1989年9月18日收到修改稿.

控制时所需花费"能量"的某种度量. 此时若 y 为某类待调节的误差时,上述问题就有特殊的意义[2]. 鉴于这个原因,本文称上述问题为能量受限的输出调节问题.

2 问题的解

作状态变量可逆替换:

$$x = e^{\alpha t}z, \tag{6}$$

则 θ_0 化为

$$\theta_1:\begin{cases}(\hat{E}+\hat{B}F)\dot{z}=z,\\ y=De^{\alpha t}z.\end{cases}$$

其中,$\hat{E}=(A-\alpha E)^{-1}E$, $\hat{B}=(A-\alpha E)^{-1}E$,易证[1]在适当的状态坐标基下,$\hat{E}+\hat{B}F$ 可取为如下形式:

$$\begin{bmatrix}\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1 & 0\\ 0 & \hat{E}_2+\hat{B}_2F_2\end{bmatrix},\quad F=(F_1,F_2). \tag{7}$$

其中,$\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1$ 可逆,$\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2$ 为幂零阵,且 F_1,F_2 相互独立,设 $\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2$ 的指数为 q,并相应地将 D 划分为 (D_1,D_2),则此时系统的输出为[1]

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)\triangleq e^{\alpha t}(D_1\exp\{(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)^{-1}t\},$$
$$\sum_{i=1}^{q-1}D_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2)^i\delta^{(i-1)}(t))z(0^-). \tag{8}$$

其中,$\delta^{(i-1)}(t)$ 为单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的 $i-1$ 阶导数.

为方便计,下面定义本文常用的一个术语,将复平面 C 划分为 $C=C_a\cup C_b$,满足 $C_a\cap C_b=\varphi$(空集,下同),且复数 $\lambda\in C_a$ 当且仅当其共轭数 $\bar{\lambda}\in C_a$,设 A 为任一方阵, 且 $\alpha(\lambda)\triangleq\alpha_a(\lambda)\alpha_b(\lambda)$ 为 A 的最小多项式,其中 $\alpha_a(\lambda)(\alpha_b(\lambda))$ 的根均属于 $C_a(C_b)$. 则称 $X_a(A)=\ker\alpha_a(A)$ 为 A 的对应于划分 C_a 的根子空间.

由[1]中的(14)、(15)两式和[4]中(4.4)及(4.6)两式即可知(3)式成立的充要条件为

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{1F}, \tag{9}$$

$$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{2F}. \tag{10}$$

其中,$N_{1F}=\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i$, $N_{2F}=\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker D(\hat{E}+\hat{B}F)^i$, $X_c(\cdot)$ 和 $X_0(\cdot)$ 为相应于划分 $C_c=\{\lambda:\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\alpha|\lambda|^2,\lambda\neq0\}$ 和 $C_0=\{0\}$ 的根子空间.

引理 1 条件(5)成立的充分条件为

$$X_d(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\ker F. \tag{11}$$

其中 $$X_d(\cdot)\triangleq X_c(\cdot)\oplus X_0(\cdot).$$

证 由(6)、(8)式可得

$$\alpha Fx=\alpha(F_1\exp\{(\alpha I+(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)^{-1})t\},$$
$$\sum_{i=0}^{q-1}F_2(\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2)^i\delta^{(i-1)}(t))x(0^-)$$
$$\triangleq\alpha(F_1G_1(t),F_2G_2(\delta^{(i-1)}(t)))x(0^-). \tag{12}$$

$$Fx=(F_1(\alpha I+(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)^{-1})G_1(t),\quad F_2G_2(\delta^{(i)}(t)))x(0^-). \tag{13}$$

由指数律的无穷积分不难知:条件(5)成立的充分条件为

$$F_1G_1(t) \to 0, \qquad t \to \infty, \tag{14a}$$

$$F_1(aI + (\hat{F}_1 + \hat{B}_1F_1)^{-1})G_1(t) \to 0, \qquad t \to \infty, \tag{14b}$$

$$F_2G_2(\delta^{(i-1)}(t)) = 0, \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{15a}$$

$$F_2G_2(\delta^{(i)}(t)) = 0, \qquad \forall\, t \geqslant 0 \tag{15b}$$

同时成立. 由文[2]引理 1 不难知(14a)与(14b)成立当且仅当

$$X_c(\hat{E}_1 + \hat{B}_1F_1) \subset \ker F_1, \tag{16a}$$

$$X_c(\hat{E}_1 + \hat{B}_1F_1) \subset \ker F_1(aI + (\hat{E}_1 + \hat{B}_1F_1)^{-1}). \tag{16b}$$

显然由(7)即知(16a)等价于

$$X_c(\hat{E} + \hat{B}F) \subset \ker F. \tag{17}$$

另一方面注意到$(aI+(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)^{-1})X_c(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)\subset X_c(\hat{E}_1+\hat{B}_1F_1)$,故由(16b)的形式即知若(17)成立,则(16b)亦成立. 此即表明(14)的充分条件是(17). 显然下面只须证条件(15)成立的充分条件为

$$X_0(\hat{E} + \hat{B}F) \subset \ker F \tag{18}$$

即可. 设 F_2 的列数为 l,则由 $\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2$ 的幂零性知,

$$X_0(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2) = R^l, \tag{19}$$

故(15a)成立当且仅当

$$X_0(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2) \subset \bigcap_{i=1}^{q-1} \ker F_2(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2)^i \tag{20}$$

成立,而这只须

$$X_0(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2) \subset \bigcap_{i=0}^{q-1} \ker F_2(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2)^i \tag{21}$$

即可,注意到 $X_0(\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2)$的$(\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2)$ -不变性,即知(21)等价于

$$X_0(\hat{E}_2 + \hat{B}_2F_2) \subset \ker F_2. \tag{22}$$

注意到 $\hat{E}_2+\hat{B}_2F_2$ 的幂零性,同理由(7)即可知(22)等价于(18),综合(17),(18)两式即证得本引理. 证毕.

由(9),(10)及引理 1 我们直接得

引理 2 广义系统 θ 的能量受限的输出调节问题通过 MPD 反馈有解的充分条件是

$$X_c(\hat{E} + \hat{B}F) \subset N_{1F} \cap \ker F, \tag{23}$$

$$X_0(\hat{E} + \hat{B}F) \subset N_{2F} \cap \ker F. \tag{24}$$

引理 3 设 $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}$, N 为 A-不变子空间,且 $X_e(\cdot)$为相应于某一划分 C_e 的根子空间,则存在 F 使得

$$X_e(A + BF) \subset N \cap \ker F \tag{25}$$

的充要条件为

$$X_e(A) \subset \langle A|B\rangle + N. \tag{26}$$

其中

$$\langle A|B\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \mathrm{Im} B. \tag{27}$$

证 由于(25)蕴涵着 $X_e(A+BF)\subset N$, N 为 A-不变子空间,从而 N 亦为(A,B)-不变的[4],故必要性是[4]中定理 4.4 的直接推论. 下证充分性. 令 $V=R^n/N_1, P: R^n\to V$ 为标准投影,其中 $N_1=N+X_g(A)\supset N$, $X_g(\cdot)$为相应于划分 $C\backslash C_e$ 的根子空间,显然 N_1 亦为 A-

不变子空间，故存在唯一的 $\overline{A}:V\to V$，使得 $\overline{A}P=PA$，令 $\overline{B}=PB$，则由[4]中引理 4.6 和(27)式知 $V=X_e(\overline{A})=\langle\overline{A}|\overline{B}\rangle$. 此即表明 $(\overline{A},\overline{B})$ 为能控对，故存在 $\overline{F}:V\to R^m$，使得谱：$\sigma(\overline{A}+\overline{B}\overline{F})$ 配置在任意给定的对称集内，特别地可使得

$$\sigma(\overline{A}+\overline{B}\overline{F})\cap C_e=\varphi. \tag{28}$$

从而若令 $F=\overline{F}P$，则显然

$$N\subset N_1\subset \ker F. \tag{29}$$

由此即知，N_1 亦 $A+BF$ -不变，故存在唯一的 $\overline{A+BF}$ 使得 $\overline{A+BF}P=P(A+BF)=(\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F})P$，从而由唯一性知 $\overline{A+BF}=\overline{A}+\overline{B}\,\overline{F}$，故从

$$\sigma(A+BF)=\sigma(\overline{A+BF})\cup\sigma[(A+BF)|N_1] \tag{30}$$

这一事实[4,6]及(28)，(29)两式即知(25)成立，这里 $(A+BF)|N_1$ 系指 $A+BF$ 在 N_1 上的限制. 证毕.

综合引理 2 和引理 3 以及有关幂零性即可得本文主要结果如下：

定理 广义系统 θ 的能量受限的输出调节问题通过 MPD 反馈可解的充分条件为

$$X_c(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D\hat{E}^i, \tag{31}$$

$$X_0(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker D\hat{E}^i. \tag{32}$$

显然，比它们更强的一个充分条件为

$$X_d(\hat{E})\subset\langle\hat{E}|\hat{B}\rangle+\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker D\hat{E}^i. \tag{33}$$

其中 $X_d(\cdot)$ 的定义如引理 1 所述.

事实上引理 3 的证明还可给出相应的算法如下：

设相应于划分 $C\backslash C_c,C\backslash C_0$ 与 $C\backslash C_d$ 的根子空间分别为 $X_1(\cdot)$、$X_2(\cdot)$ 和 $X_3(\cdot)$，则

1° 置 $i:=1,F:=0,E:=\hat{E},B:=\hat{B}$，并判定条件(33)或(31)和(32)，其中若条件(33)满足，则置 $i:=i+2$；

2° 若 $i<3$，则置 $N:=N_{iF}+X_i(E)$，否则置 $N:=N_{1F}+X_3(E)$，然后计算 $P:R^n\to R^n/N$，及相应的 $\overline{E},\overline{B}$，并找出 $\overline{F}:R^n/N\to R^m$，使得

$$\sigma(\overline{E}+\overline{B}\,\overline{F})\cap C_d=\varphi, \tag{34}$$

并置 $F:=F+\overline{F}P$；

3° 若 $i\geqslant 2$，则 $u=aFx-F\dot{x}$ 即为所求，否则置 $i:=i+1,E:=E+BF$，返回 2°.

注：显然，若设 $i=1,2$ 时所得 F 分别为 F_1 和 F_{20}，且记 $F_2=F_{20}-F_1$，则由上述算法最终得出的 F 满足：

$$X_c(\hat{E}+\hat{B}F)=X_c(\hat{E}+\hat{B}F_1), \tag{35}$$

$$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)=X_0(\hat{E}+\hat{B}F_2). \tag{36}$$

这是因为上述算法中 N 所取的结构以及(34)式即使得 F_1 对 $X_0(\cdot)$ 以及 F_2 对 $X_c(\cdot)$ 的结构均无影响之故. 于是由引理 3 便不难知上述算法所得 F 确为所求. 算法第 2 步中可用作计算 $\overline{F}$ 的算法很多，如可采用[4]和[6]中的有关算法.

3 结论

本文论述了广义系统的能量受限的输出调节问题通过 MPD 反馈的可解性，得到了有

关的充分条件及算法，但条件(25)显得强了一些，一个更弱的充分条件为(24)式和

$$X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker F(\hat{E}+\hat{B}F)^i\cap N_{2F},\tag{37}$$

或等价地

$$(\hat{E}+\hat{B}F)X_0(\hat{E}+\hat{B}F)\subset N_{1F}\cap\ker F\tag{38}$$

同时成立. 但我们目前尚未得到判别(38)式成立与否的任何结果. 这个问题的充要条件无疑是十分困难的. 广义系统的能量受限的输出调节问题通过一般状态反馈：$u=Fx$ 的可解性也是一个十分有意义的课题，但即使是对于能量不受限的情形，也只有文[7]对脉冲能控系统所做的部分工作.

参　考　文　献

[1] 杨成梧，邹云. 广义系统的输出稳定化通过 MPD 反馈的可解性. 控制理论与应用，1989，6(1)：43—50
[2] Bhattacharyya，S. P.. Output Regulation with Bounded Energy. IEEE Trans. on Automat. Contr.，1973，August：381—383
[3] 王朝珠，戴立意. 广义动态系统. 控制理论与应用，1986，3(1)：144—152
[4] W. M. 旺纳姆著；姚景依译. 线性多变量控制：一种几何方法. 北京：科学出版社，1984，107—112
[5] Zheng Zhou，Shayman，Mark A.. Singular Systems：A New Approach in the Time Domain. IEEE Trans. on Automat. Contr.，1987，32：42—50
[6] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984
[7] 杨成梧，邹云. 脉冲能控系统的输出稳定化. 控制与决策，1989，(1)：44—45

On the Output Regulation of Singular Systems via MPD Feedback with Bounded Energy

Zou Yun，　Yang Chengwu

(Ballistic Rescrch Laboratory of China，East China Institute of Technology，Nanjing)

Abstract：In this paper we have discussed the problem of zeroing the output $y=Dx$ of the singular system $E\dot{x}=Ax+Bu$ and eliminating the impulse modes contained in the output by control of the form $u=F(\alpha x-\dot{x})$ under a constraint of the type $\int_0^\infty u^T(t)Ru(t)\mathrm{d}t<\infty$，and have proposed a sufficient condition on the solvability of this problem and the corresponding algorithm.

Key words：singular systems；lincar systems；output regulaton