第 8 卷 第 2 期
1991 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 8, No. 2
June, 1991

线性二次型最优控制闭环系统极点的必要条件

喻铁军　戴冠中
(西北工业大学计算机系，西安)

摘要：本文推导了线性二次型(LQ)最优控制闭环系统极点应满足的必要条件，以及与加权阵 Q 和 R 的等式关系.

关键词：LQ 最优控制；线性多变量系统；闭环极点

1　引　言

具有希望闭环极点或动态特性的 LQ 最优控制系统设计是一种将极点配置和最优控制相结合的设计方法. 自从它提出以来，就广泛引起了人们的注意，并提出了许多的设计方法[1-3].

我们知道 LQ 最优控制系统并不能任意配置极点，即对给定的希望闭环极点，并不一定存在相应的加权阵 Q 和 R，使得由此设计的 LQ 闭环系统具有指定的极点. 于是，研究 LQ 闭环系统极点应满足的条件，即研究 LQ 设计逆问题解的存在性，将是具有指定闭环极点的 LQ 最优控制系统设计中非常重要的，也是必须首先解决的问题. 但是，目前关于这个问题研究的文献[4,5]不多，还没有得到比较满意的结果，特别是多输入系统的情况.

本文研究这类问题，推导了一个 LQ 闭环极点应满足的必要条件，以及与加权阵 Q 和 R 的等式关系.

2　主要结果

考虑线性、定常系统

$$\dot{X} = AX + BU. \tag{1}$$

其中，A 和 B 分别为 $n\times n$ 和 $n\times m$ 维常数阵，则 LQ 设计问题为：确定线性控制律 $U=-KX$，使二次型指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (X^TQX + U^TRU)\mathrm{d}t \tag{2}$$

达到极小，其中 $Q=Q^T\geqslant 0, R=R^T>0$.

当 (A,B) 为可稳对，(A,H) 为可检测对(这里，$Q=H^TH$)时，LQ 设计问题的解为

$$K = R^{-1}B^TP. \tag{3}$$

其中 P 为下列 Riccati 方程的对称正半定解

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0. \tag{4}$$

于是，LQ 闭环系统为

$$\dot{X} = (A - BR^{-1}B^TP)X \triangleq A_cX. \tag{5}$$

本文于1989年8月25日收到. 1990年9月18日收到修改稿.

设 $\lambda_{iO}(i=1,2,\cdots,n)$ 为开环系统(1)的极点，$\lambda_{iC}(i=1,2,\cdots,n)$ 为希望的闭环极点，它们或是实极点，或是共轭复极点，则可以证明有如下结论.

定理 1　$\lambda_{iC}(i=1,2,\cdots,n)$ 成为 LQ 闭环极点的必要条件是

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_{iC} \leqslant \sum_{i=1}^{N}\lambda_{i\bar{O}}. \tag{6}$$

其中，$\lambda_{i\bar{O}}$ 定义为

$$\lambda_{i\bar{O}} = \begin{cases} \lambda_{iC} & \text{当 } \mathrm{Re}(\lambda_{iO}) \leqslant 0 \text{ 时}, \\ -\lambda_{iO} & \text{当 } \mathrm{Re}(\lambda_{iO}) > 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{7}$$

在证明定理 1 的结论之前，我们先对 $Q=0$ 的奇异情况进行一些讨论.

当 $Q=\mathbf{0}$ 时，由二次型指标确定的最优控制为 $U\equiv\mathbf{0}$，即 $K\equiv\mathbf{0}$，不能使开环系统稳定. 为了保证闭环系统稳定，我们对 $Q=\mathbf{0}$ 时的奇异情况作如下修改，定义反馈阵为

$$K = R^{-1}B^TP_M. \tag{3'}$$

其中，P_M 为下矩阵方程的最大解[6,7]

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP = \mathbf{0}. \tag{4'}$$

对应的闭环系统为

$$\dot{X} = (A - BR^{-1}B^TP_M)X \triangleq A_{CM}X. \tag{5'}$$

对于上面定义的反馈控制律，文献[6]给出了如下结论.

引理 1　由(3′)式确定的控制律 $U=-KX$，能使开环系统(1)稳定，且闭环系统(5′)的极点将由开环系统(1)的稳定极点 $\lambda^-(A)=\{\lambda_{iO}: \mathrm{Re}(\lambda_{iO})\leqslant 0\}$ 和不稳定极点 $\lambda^+(A)=\{\lambda_{iO}: \mathrm{Re}(\lambda_{iO})>0\}$ 的镜象极点 $-\lambda^+(A)=\{-\lambda_{iO}: \mathrm{Re}(\lambda_{iO})>0\}$ 组成，即

$$\lambda(A_{CM}) = \{\lambda^-(A) \& -\lambda^+(A)\} = \{\lambda_{i\bar{O}}\}.$$

定理 1 的证明　比较方程(4)和(4′)，并注意到 $Q\geqslant\mathbf{0}$ 时，有[7]

$$P \geqslant P_M. \tag{6}$$

即 $P-P_M$ 为正半定矩阵. 于是，由方程(3)、(5)、(3′)和(5′)可得

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A_C - A_{CM}) &= \mathrm{tr}[BR^{-1}B^T(P_M - P)] \\ &= \mathrm{tr}\{(BR^{-1/2})^T(P_M - P)BR^{-1/2}\} \leqslant 0. \end{aligned}$$

即

$$\mathrm{tr}(A_C) \leqslant \mathrm{tr}(A_{CM}). \tag{7}$$

所以，由矩阵关系 $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$ 即可证明不等式(6)成立，从而定理得证.

定理 1 的结论推广到更一般的情况可得如下结论.

定理 2　设 A_{C1} 和 A_{C2} 分别对应于状态加权阵 Q_1 和 Q_2 的 LQ 闭环系统矩阵(控制加权阵 R 相同)，则当 $Q_1\leqslant Q_2$ 时，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_{C1}) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A_{C2}). \tag{8}$$

定理 2 的证明过程完全与定理 1 的证明过程类似，只是在定理 2 的证明中要用到如下结论.

引理 2[7]　设 P_1 和 P_2 分别对应于 Q_1 和 Q_2 的 Riccati 方程(4)的对称正半定解，则当 $Q_1\leqslant Q_2$ 时，有

$$P_1 \leqslant P_2.$$

如设 $\lambda_{ic}(i=1,2,\cdots,n)$ 为对应于加权阵 Q 和 R 的 LQ 闭环极点,则可推出如下结论.

定理 3 $\lambda_{ic}(i=1,2,\cdots,n)$ 与加权阵 Q 和 R 将满足如下方程

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ic}^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{io}^2=\mathrm{tr}(BR^{-1}B^TQ). \tag{9}$$

证 由(4)和(5)式可得

$$\begin{aligned}BR^{-1}B^TQ&=-BR^{-1}B^TA^TP-BR^{-1}B^TPA_C\\&=-BR^{-1}B^TA^TP-(A-A_C)A_C\\&=A_C^2-A(A-BR^{-1}B^TP)-BR^{-1}B^TA^TP\\&=A_C^2-A+ABR^{-1}B^TP-BR^{-1}B^TA^TP.\end{aligned} \tag{10}$$

考虑到 P 为对称矩阵,并利用矩阵关系 $\mathrm{tr}(XY)=\mathrm{tr}(YX)$ 可得

$$\mathrm{tr}(ABR^{-1}B^TP-BR^{-1}B^TA^TP)=0. \tag{11}$$

于是,由矩阵关系 $\lambda(X^2)=\lambda^2(X)$,$\mathrm{tr}(X)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(X)$ 以及(10)和(11)式,即可证明(9)式成立.

由定理 3 的结论,我们可以很容易地证明文献[4]的结论. 注意到

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ic}^2=\sum_{i=1}^{n}[R_e^2(\lambda_{ic})-I_m^2(\lambda_{ic})],\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_{io}^2=\sum_{i=1}^{n}[R_e^2(\lambda_{io})-I_m^2(\lambda_{io})],$$

以及

$$\mathrm{tr}(BR^{-1}B^TQ)=\mathrm{tr}(R^{-1/2}B^TQBR^{-1/2})\geqslant 0,$$

即可获得文献[4]的结果:

$$\sum_{i=1}^{n}[R_e^2(\lambda_{ic})-I_m^2(\lambda_{ic})]\geqslant\sum_{i=1}^{n}[R_e^2(\lambda_{io})-I_m^2(\lambda_{io})].$$

由此可以看出,文献[4]的结论仅是本文结论的一种特例.

3 结 论

线性二次型最优控制系统具有许多良好的鲁棒特性,但由于闭环系统的动态特性与加权阵 Q 和 R 的关系并不清楚,大大地限制了 LQ 设计技术的实际应用. 所以,研究 LQ 闭环系统动态特性与加权阵之间的关系,将是非常重要的. 而且,目前关于这一方面研究的文献并不多,尚有许多问题有待进一步地研究,许多结果有待进一步地完善.

本方研究了 LQ 闭环系统极点的性质,推导了 LQ 闭环系统极点应满足的必要条件,以及与加权阵 Q 和 R 的等式关系,这不但在理论上具有一定的价值,而且在具有指定闭环极点的 LQ 设计中对闭环极点与加权阵的选择将具有一定的指导作用.

参 考 文 献

[1] Fujii, T.. A New Approach to the LQ Design From the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(11):995—1004

[2] Juang, J. C., Lee, T. T.. On Optimal Pole Assignment in a Specified Region. Int. J. Control, 1984, 40(1):65—79

[3] 喻铁军, 戴冠中. 指定闭环特征值的最优控制系统参数化设计. 控制与决策, 1989, 4(4):18—22

[4] Koussiouris, T. G.. A Necessary Condition for Optimization in the Frequency Domain. Int. J. Control, 1982, 36(2):213—215

[5] Eitelberg, E., Roppenecker, G.. Comments on ' A Necessary Condition for Optimization in the Frequency Domain' and on ' Optimization and Pole Placement for a Single Input Controllable System', Int. J. Control, 1984, 38 (2): 493—494

[6] Kawasaki, N., Shimemura, E.. A Method of Deciding Weighting Matrices in an LQ-Problem to Locate All Poles in the Specified Region. 8th Triennial World Congress, Kyoto, Japan, 1981, 481—486

[7] 韩京清, 何关钰, 许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1987, 760—790

On the Necessary Condition for Poles of Linear Quadratic Optimal Control Systems

Yu Tiejun, Dai Guanzhong

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Abstract: A necessary Condition is derived for the closed-loop poles of linear multivariable feedback optimal Control System with respect to quadratic performance index, and a equational relation is also presented for the closed-loop poles to the weighting matrices Q and R in quadratic index in this paper.

Key words: LQ optimal control; linear multivariable system; closed-loop poles

(上接第 223 页)

IFAC Symposium(7th) Automation in Mining, Mineral and Metal Processing	August 26-28	Beijing China, P. R.	20 Aug. 1991	Prof. Huang Tai-Yi, Chinese Associatiion of Automation, Institute of Automation, Academia Sinica, POB 2728, Beijing, China, P. R.
IFAC Workshop((2nd) System Structure and Control	Sept. 3-5	Prague CSFR	10 Jan. 1992	2nd IFAC Workshop. Inst. of Inf. Theory and Automation, POB 18 CS 182 08 Prague, CSFR
IFAC/IAF Symposium Automatic Control in Aerospace	Sept. 8-11	Munich FRG	Sept. 1991	Dr. Ing. E. Gottzein, c/o MBB POB 801169 D-W-8000 Munich 80, FRG
IFAC Symposium Automated Systems Based on Human Skills	Sept. 23-25	Boston USA	*	Dr. Frank Emspak, Center f. Applied Techn. 9 Park Street, Boston, MA 02108, USA
IFAC/IFIP Symposium SAFECOMP' 92	Nov. 1992	Baden Switzerland	*	Dr. H. Kirmann, ABB Corporate Research Segelhof, CH- 545405 Dättwil, Switzerland

* not yet known
- deadline past