第 16 卷第 2 期
1999 年 4 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.16, No.2
Apr., 1999

时滞中立型线性系统的变结构控制 *

高存臣
(烟台师范学院数学与计算机科学系·烟台, 264025)
张新政　刘永清
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

摘要: 本文研究了一类时滞中立型线性系统的变结构控制问题,在系统谱可控的条件下给出了具有稳定的滑动模态的切换泛函的构造方法,并利用趋近率的概念和方法设计了该系统的变结构控制器,得到一般时滞中立型系统可变换成所需要的时滞中立型系统的条件.

关键词: 时滞; 中立型系统; 变结构控制; 滑动模态; 切换泛函

Variable Structure Control of Neutral Linear Systems with Delays

Gao Cunchen
(Department of Mathematics and Computer Science, Yantai Teachers University·Yantai, 264025, P.R.China)
Zhang Xinzheng　and　Liu Yongqing
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology·Guangzhou, 510640, P.R.China)

Abstract: The variable structure control problem of a class of neutral linear systems with time-delay is studied in this paper. The design method for the switching function which leads to stable sliding modes is given if the spectrums of the system are controllable, and the variable structure controller is designed by using the concept and method of approaching law. Some conditions are obtained, which can transform the general delay neutral system into the needed delay neutral system.

Key words: time-delay; neutral system; variable structure control; sliding mode; switching function

1 引言(Introduction)

时滞中立型系统的变结构控制(VSC)在工程实际和社会实践中是非常有意义的.文[1,2]研究了时滞系统的 VSC 问题,文[2]给出了滑动模态的边界层逼近性条件,并利用指数趋近率的概念和方法[3]设计了 VSC 器,文[4]研究了一类状态变量含有时滞的线性系统的 VSC,并指出了传统的切换函数在时滞系统中实际上是一个切换泛函,给出了 VSC 器的设计方案.文[5]研究了时滞中立型模型跟踪系统的滑动模补偿器方法.关于时滞中立型系统的 VSC 器的设计与切换泛函的构造至今尚未见讨论,本文正要研究这个问题.本文研究了一类较简单的时滞中立型系统的 VSC 问题,即仅有状态变量含有时滞的中立型线性系统的 VSC 问题.

2 时滞中立型线性系统的变结构控制(Variable structure control of neutral linear systems with delays)

考虑下面的时滞中立型线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^0x(t) + A^1x(t-\tau) + \\ \qquad A^2\dot{x}(t-\tau) + bu(t), \\ x(t) = \phi(t),\ \dot{x}(t) = \dot{\phi}(t), \\ u(t) = \psi(t),\ -\tau \leqslant t \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量; $u(t) \in \mathbb{R}$ 为系统的控制变量; A^0, A^1, A^2, b 分别为 $n\times n, n\times n, n\times n, n\times 1$ 的常数矩阵, $\tau = \text{const} > 0$ 为系统状态的时间滞后(或称时滞).

容易验证,系统(1)的特征矩阵为 $D(\lambda) = \lambda I - A(\lambda)$,其中 $A(\lambda) = A^0 + A^1e^{-\lambda\tau} + A^2e\lambda^{-\lambda\tau}$.由[6],[7]知,系统(1)的谱 $\sigma(A(\lambda)) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \det D(\lambda) = 0\}$ 是一个无限集,但在一定条件下,采用反馈

$$u(t) = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(\theta)]x(t+\theta), \tag{2}$$

可使闭环系统的谱 $\sigma_c(A(\lambda), b, \eta) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \det D_c(\lambda) = 0\}$ 为有限集,且其谱点可任意配置,这里 $D_c(\lambda) = \lambda I - A(\lambda) - bk(\lambda)$,

$$k(\lambda) = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(\theta)]e^{\lambda\theta}. \tag{3}$$

* 国家自然科学基金(69874005)资助项目.
本文于 1996 年 9 月 23 日收到. 1998 年 4 月 6 日收到修改稿.

$\eta(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,且 $\eta(\theta)$ 为$[-\tau,0]$上的有界变差向量函数.

下面研究(2)表示的反馈控制律 $u(t)$ 或(3)中 $k(\lambda)$ 的求解方法.把 $\det D(\lambda)$ 表为

$$\det D(\lambda) = [\det(I - A^2 e^{-\lambda\tau})]\lambda^n - \sum_{i=1}^{n}\rho_i(e^{-\lambda\tau})\lambda^{n-i}. \tag{4}$$

$\rho_i(e^{-\lambda\tau})$ 为关于 $e^{-\lambda\tau}$ 的 i 次多项式.因 $\sigma(A(\lambda),b,\eta)$ 为有限集,故其特征根的个数有限.假定闭环系统(1),(2)有所期望的特征多项式

$$q(\lambda) = \alpha_0\lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda^{n-i},$$

其中

$$\alpha_0 = \det(I - A^2 e^{-\lambda\tau}),\quad \alpha_i \in \mathbb{R}(i = 1,\cdots,n).$$

如果存在可表成(3)式的 n 个向量函数 $k_j(\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, j = 0,1,\cdots,n-1$,使得

$$k_j^{\mathrm{T}}(\lambda)\cdot \mathrm{adj}D(\lambda)\cdot b = \lambda^j,\ j = 0,1,\cdots,n-1, \tag{5}$$

那么只要取

$$k(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\{[\alpha_i + \rho_i(e^{-\lambda\tau})]k_{n-i}(\lambda)\},$$

并适当选取 $\eta(\theta)$,便可得到 $\det D_c(\lambda) = q(\lambda)$,且 $k(\lambda)$ 具有(3)的形式.上述结果可以表述为下面的引理 1.

引理 1[7]　若方程(5)有形如(3)的解,则反馈控制律(2)可将闭环系统(1),(2)的谱配置成复平面 $\mathbb{C}$ 的一个基为 n 的有限集.

引理 2[8]　若 $\det M(v) = \mathrm{const} \neq 0$,则关于 $k_j(\lambda)$ 的方程组(5)有形式为$[k_0(\lambda),k_1(\lambda),\cdots,k_{n-1}(\lambda)] = [M^{-1}(e^{-\lambda\tau})]^{\mathrm{T}}$ 的解.

引理 3[7,9]　若系统(1)的谱可控,即对任意的 $\lambda \in \mathbb{C}$,有 $P(\lambda)\cdot h(e^{-\lambda\tau}) \neq 0$,则方程组(5)有解等价于下述方程组有解:

$$p^{\mathrm{T}}(\lambda)\cdot k_j(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^j\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p_{j,n-2}(\lambda)\\\vdots\\p_{j,0}(\lambda)\\0\end{bmatrix}(e^{-\lambda\tau}) - \begin{bmatrix}0\\p_{j,n-2}(\lambda)\\\vdots\\p_{j,0}(\lambda)\end{bmatrix},$$

$(j = 0,1,\cdots,n-1)$.其中 $p_{j,i}(\lambda)$ 为 λ 的次数不大于 i 的多项式,其系数是待定的.

应用上述结果,我们设计一个状态变量带有时滞的时滞中立型线性控制系统的 VSC 器.

对系统(1),若存在可逆的状态变换矩阵 T

$$y = Tx = \begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中 $y_1 \in \mathbb{R}^{n-1}, y_2 \in \mathbb{R}$,使得

$$Tb = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix},\quad \tilde{A}^1 = TA^1T^{-1} = \begin{bmatrix}A_{11}^1 & 0\\A_{21}^1 & A_{22}^1\end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}^2 = TA^2T^{-1} = \begin{bmatrix}A_{11}^2 & 0\\A_{21}^2 & A_{22}^2\end{bmatrix},$$

则系统(1)可化成

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) = {} & A_{11}^0 y_1(t) + A_{12}^0 y_2(t)\\ & A_{11}^1 y_1(t-\tau) + A_{11}^2\dot{y}_1(t-\tau),\end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2(t) = {} & A_{21}^0 y_1(t) + A_{22}^0 y_2(t) +\\ & A_{21}^1 y_1(t-\tau) + A_{21}^2\dot{y}_1(t-\tau) +\\ & A_{22}^1 y_2(t-\tau) + A_{22}^2\dot{y}_2(t-\tau) + u(t),\end{aligned} \tag{7b}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = T_1\phi_1(t),\quad y_2(t) = T_2\phi_2(t),\\ \dot{y}_1(t) = T_1\dot{\phi}_1(t),\\ \dot{y}_2(t) = T_2\dot{\phi}_2(t),\ -\tau \leqslant t \leqslant 0,\end{cases} \tag{7c}$$

其中 $\tilde{A}^0 = TA^0T^{-1} = \begin{bmatrix}A_{11}^0 & A_{12}^0\\A_{21}^0 & A_{22}^0\end{bmatrix}$.

对系统(7a),若方程

$$\tilde{k}_j^{\mathrm{T}}(\lambda)\cdot \mathrm{adj}\tilde{D}(\lambda)\cdot A_{12}^0 = \lambda^j,\quad j = 0,1,\cdots,n-2 \tag{8}$$

有解(其有解性条件可参见[6]的第 414～418 页),其中

$$\tilde{D}(\lambda) = \lambda I_{n-1} - A_{11}^0 - A_{11}^1 e^{-\lambda\tau} - A_{11}^2\lambda e^{-\lambda\tau},$$

I_{n-1}是 $n-1$ 阶单位阵,则可构造反馈

$$y_2(t) = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]y_1(t+\theta), \tag{9}$$

使得闭环子系统(7a),(9)是渐近稳定的,且有所期望的有限谱,其中 $\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta) \in BV([-\tau,0],\mathbb{R}^{n-1})$,并由下面两式确定:

$$\begin{cases}\tilde{k}(\lambda) = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]e^{-\lambda\tau},\\ \tilde{k}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1}[\tilde{\alpha}_i + \tilde{\rho}_i(e^{-\lambda\tau})]\tilde{k}_{n-1-i}(\lambda),\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\tilde{\alpha}_i,\tilde{\rho}_i$ 分别由闭环子系统(7a),(9)及开环子系统(7a)的特征多项式确定.

这样一来,对系统(7),可构造切换泛函

$$S(t)=y_2(t)-\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]y_1(t+\theta) \tag{11}$$

使得由此得到的滑动模态 $S(t)=0$ 是渐近稳定的.

注 1　把(6)式代入(11)式,得到

$$S(t)=T_2x(t)-\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1x(t+\theta). \tag{12}$$

由此可见,系统(1)的切换流形是 $\mathbb{C}^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ 的一个子流形,故时滞中立型VSC系统的切换函数实质上是一个切换泛函.这是与传统的不带时滞的VSC系统的切换函数的本质区别.

由于 $T_1b=0,T_2b=1$,所以由(12),(1)可求得 $S(t)$ 沿系统(1)的全导数 $\dot{S}(t)\mid_{(1)}$:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t)\mid_{(1)}=\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=&\ T_2[A^0x(t)+\\&A^1x(t-\tau)+A^2\dot{x}(t-\tau)]-\\&\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+\\&A^1x(t-\tau+\theta)+A^2\dot{x}(t-\tau+\theta)]+u(t),\end{aligned} \tag{13}$$

取等速趋近律[3],便可得到VSC律 $u(t)$ 为

$$u(t)=\begin{cases}-T_2[A^0x(t)+A^1x(t-\tau)+A^2\dot{x}(t-\tau)]+\\ \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+A^1x(t-\\ \tau+\theta)+A^2\dot{x}(t-\tau+\theta)]-\varepsilon,\quad s>0,\\ -T_2[A^0x(t)+A^1x(t-\tau)+A^2\dot{x}(t-\tau)]+\\ \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+A^1x(t-\\ \tau+\theta)+A^2\dot{x}(t-\tau+\theta)]+\varepsilon,\quad s<0,\end{cases} \tag{14}$$

其中 $\varepsilon=\mathrm{const}>0$.控制律(14)中的 $x(t+\theta)$ 及 $\dot{x}(t-\tau+\theta)$, $-\tau\leqslant\theta\leqslant0$ 是系统状态变量的过去信息,因而在系统控制中是容易实现的.类似的仿真例子可参见[5].

在(13)式中令 $\dot{S}(t)=0$,可以推得等效控制为

$$\begin{aligned}u_{eq}(t)=&-T_2[A^0x(t)+A^1x(t-\tau)+A^2\dot{x}(t-\tau)]+\\&\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+\\&A^1x(t-\tau+\theta)+A^2\dot{x}(t-\tau+\theta)].\end{aligned} \tag{15}$$

将(15)式代入(1)式,可得滑动模态运动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(I-bT_2)[A^0x(t)+A^1x(t-\tau)+A^2\dot{x}(t-\tau)]+\\ \quad b\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+\\ \quad A^1x(t-\tau+\theta)+A^2\dot{x}(t-\tau+\theta)],\\ T_2x(t)-\int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}\tilde{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1x(t+\theta)=0.\end{cases} \tag{16}$$

定理 1　对时滞中立型控制系统(1),若(6)的变换矩阵 T 存在,且代数方程组(8)有解,多项式 $q(\lambda)=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\lambda^{n-1-i}$ 是稳定的,则采用VSC器(14)可使系统(1)渐近稳定,且滑动模态方程(16)具有有限谱且渐近稳定.

注 2　时滞中立型闭环系统(1),(14)的状态空间是 $\mathbb{C}^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$,切换流形是 $\mathbb{C}^1$ 的一个子流形.当系统的状态未到达切换流形时,则系统的运动已被定义,即对任意初始向量函数 $\phi\in\mathbb{C}^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$,系统(1),(14)对 $S(x(t))=0$ 以外的相轨线 $x(t)$ 都是连续的,且满足Lipschitz条件,从而对任意的 $\phi\in\mathbb{C}^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)\setminus\{x:S(x(t)=0)\}$,系统(1),(14)存在唯一解.设系统的状态 $x(t)$ 在时刻 t_1 到达切换流形,当 $t\geqslant t_1$ 时,系统的运动由时滞中立型系统(16)所定义,而以闭环系统(1),(14)在 $[t_1-\tau,t_1]$ 上的运动作为其初始向量函数.由[6]知,在此初始条件下,系统(16)在 $[t_1,+\infty)$ 上的解 $x(t)$ 是存在且唯一的,除去可能在 $t-t_1$ 处不可微外,在 $t>t_1$ 时处处可微.所以整个系统(1),(14)在 $t\geqslant-\tau$ 时的运动状态只是在 $t=t_1$ 处有可能不可微(但仍连续),这与传统的不带时滞的变结构系统中的"止点"具有类似之处.

关于状态变量矩阵 T 的存在性及具体求法可由下面定理给出,证明略去.

定理 2　满足(10)的变换矩阵 T 存在的充要条件是 b 为 A^1 与 A^2 的一个特征向量.

3　设计过程(The process of design)

VSC可按如下步骤进行设计:

i) 由定理2求变换 T(即 $T=W^{-1}$);

ii) 由引理2或引理3求出方程(8)的解 $\tilde{k}_j(\lambda)$, $j=0,1,\cdots,n-2$,并由公式(10),求出 $\tilde{\eta}(\theta)$;

iii) 由(12)式构造切换泛函 $S(x(t))$;

iv) 由(14)式设计变结构控制器.

注 3　在时滞中立型控制系统的VSC器的设计中,本文采用的是等速趋近律.若用幂次趋近律、指数趋近律或一般趋近律,可以得到形式不同的VSC

器,且可比较其优劣,此处从略.

注 4 在系统(1)中,若取 $A^2 = 0$,则可得到滞后型控制系统的 VSC 器的设计方法[4].因此,本节的结论比[4]的相应结论适用范围更大,而对于时滞中立型控制系统,用[4]中的方法是不能设计其 VSC 器的.

参考文献(References)

1 Jarfarov E M. Analysis and Synthesis of Multidimensional Systems of Variable Structure with Delays in Sliding Modes. Proc. 11th IFAC World Congress, Tallinn, 1990, 6:46 – 49

2 胡跃明,周其节.带有滞后影响的控制系统的变结构控制.自动化学报,1991,17(5):587 – 591

3 高为炳,程勉.变结构控制的品质控制.控制与决策,1989,4(4):1 – 6

4 郑锋,程勉,高为炳.一类时滞线性系统的变结构控制.自动化学报,1995,21(2):221 – 225

5 高存臣,王立,刘永清.线性时滞中立型控制系统的滑动模补偿器方法.控制与决策,1996,11(5):565 – 570

6 Hale J K. Theory and Applications of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1992

7 Manitius A Z and Olbrot A W. Finite spectrum problem for systems with delays. IEEE Trans. Automat. Contr, 1979, AC-24(4):541 – 553

8 Morse A S. Ring modes for delay-differential systems. Automatica, 1976, 12(3):529 – 531

9 Manitius A Z and Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions. SIAMJ Control and Optimization, 1978, 16(4):599 – 645

10 Gao C C and Liu Y Q. Stability of Variable Structure Control System. Proc. of the 1995 American Control Conference, Washington, 1995, 6(2):1538 – 1539

本文作者简介

高存臣 1956 年生.1978 年毕业于烟台师范专科学校数学系,1986 年结业于安徽大学基础数学助教进修班,1997 年于华南理工大学自动控制工程系控制理论与应用专业获得工学博士学位.现为烟台师范学院数学与计算机科学系教授.感兴趣的研究方向为滞后大系统控制理论与应用,滞后变结构控制理论与应用.

张新政 女,1955 年生.1980 年毕业于中山大学计算机科学系,现为广东工业大学自动化研究所教授、华南理工大学自动控制工程系在职博士生.研究方向为滞后控制系统的结构鲁棒稳定、镇定及算法仿真的理论与应用.

刘永清 见本刊 1999 年第 1 期第 122 页.