状态相关闭排队网络中的性能指标灵敏度公式*

殷保群 周亚平 杨孝先 奚宏生 孙德敏
(中国科技大学自动化系·合肥,230026)

摘要: 本文通过研究一类 Markov 过程在无穷小矩阵的参数摄动下稳态性能指标的灵敏度,运用无穷小矩阵的群逆、实现矩阵和势能这三个描述稳态性能指标灵敏度的等价量,给出了状态相关闭排队网络在参数摄动下的稳态性能指标灵敏度公式.这些结果可直接用于排队网络的控制和优化.

关键词: 参数摄动; 性能指标; 灵敏度; 势能

Sensitivity Formulas of Performance in Closed State-Dependent Queueing Networks

Yin Baoqun, Zhou Yaping, Yang Xiaoxian, Xi Hongsheng and Sun Demin
(Department of Automation, University of Science and Technology of China·Hefei, 230026, P.R.China)

Abstract: Sensitivity of the steady-state performance of a class of Markov processes with respect to the parameter perturbations of their infinitesimal matrices are studied. Then sensitivity formulas of the steady-state performance with respect to the parameter perturbations are given in closed state-dependent queueing networks. These formulas can be expressed by using any of the group inverse of the infinitesimal matrix, the realiztion matrix and the potentials. These results can be directly used in the problems of optimization and controlling of queueing networks.

Key words: parameter perturbation; performance; sensitivity; potential

1 引言(Introduction)

摄动分析方法是研究传统生产线的工具之一.该方法中的摄动实现概念[1],成功地被用于研究排队网络稳态性能指标的灵敏度分析.运用此方法可成功地解决服务率参数摄动的灵敏度分析问题,但此方法似乎较难用于对路径概率参数摄动的灵敏度分析问题[2].此外,还要假设网络满足所谓可积性条件.运用本文方法导出的灵敏度公式,则克服了上述困难,特别是避免了讨论求数学期望和求导数交换顺序的问题.由于 Markov 过程是排队网络的基本模型,故此方法为摄动分析在排队网络中的应用开辟了一条新的途径.

2 一类 Markov 过程的稳态性能指标灵敏度公式(Sensitivity formulas of the steady-state performance for a class of Markov processes)

由于我们考虑的是 Markov 型排队网络,故我们先来研究一类 Markov 过程在其无穷小矩阵的一个参数摄动下,其稳态性能指标的灵敏度.

2.1 性能指标(Performance)

考虑一个正常返的,不可约的 Markov 过程 $Y=\{Y(t), t\geqslant 0\}$.它有一个有限的状态空间 $\Phi=\{1,2,\cdots,K\}$,无穷小矩阵为 $A=[a_{ij}]$.由文献[3]中定理 5-2-3 可知,Y 存在唯一的稳态分布.用 $P=(p(1),p(2),\cdots,p(K))$ 表示 Y 的稳态概率向量,以下用 $\mathbb{R}^K$ 表示 K 维 Euclid 空间,且简记 $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$.设 $e=(1,1,\cdots,1)'$ 为一 K 维列向量,"B'"表示矩阵 B 的转置.则由文献[3]可知,$Pe=1$ 和

$$Ae=0,\quad PA=0. \tag{1}$$

设 $f:\Phi\to\mathbb{R}$ 为一个性能指标函数,定义稳态性能指标为 f 关于稳态概率 P 的期望值,记为 η_f,即

$$\eta_f=E_P[f]=\sum_{i=1}^{K}p(i)f(i)=P\bar{f}. \tag{2}$$

其中,

$$\bar{f}=(f(1),f(2),\cdots,f(K))';$$

$P\bar{f}$ 表示 $1\times K$ 矩阵 P 和 $K\times 1$ 矩阵 $\bar{f}$ 的乘积或向量 P 和 $\bar{f}$ 的数量积.

现在设无穷小矩阵 A 为在区间 $J\subset R$ 上变化的参数 θ 的可微函数,即所有 $a_{ij}=a_{ij}(\theta), i,j=1,$

* 华为科研基金(97BJ0101)和青年科学基金(96KA2612)资助.
本文于 1996 年 6 月 17 日收到.1998 年 4 月 22 日收到修改稿.

2,…, K 为 θ 的可微函数,由于 P 是方程 $PA=0$, $Pe=1$ 的唯一解,且 P 一定存在,故由线性方程组理论可知, P 的所有分量都是 a_{ij}, $i,j=1,2,\cdots,K$ 的有理函数,再由假设所有 a_{ij} 为 θ 的可微函数,故 P 在其定义域 J 上连续且为 θ 的可微函数,而由 η_f 的定义可知, η_f 也为 θ 的可微函数.

2.2 性能指标灵敏度公式(Sensitivity formulas of the performance)

为了给出性能指标灵敏度公式,我们先给出两个引理,并介绍两个基本概念,势能和实现矩阵.

引理 1 线性方程

$$Ax=-\bar{f}+\eta_f e \tag{3}$$

有解 $x=-A^{\#}\bar{f}+\beta e$, β 为任一实数.

这里

$$A^{\#}=(A+eP)^{-1}-eP, \tag{4}$$

称为无穷小矩阵 A 的群逆[4].

定义 1 线性方程(3)的任一解 x 称为 Markov 过程 Y 关于 f 的势能向量,记为 $x^{(f)}$. 而 $x^{(f)}$ 的第 i 个分量称为 Y 关于 f 在状态 i 时的势能, $i\in\Phi$.

引理 2 Lyapunov 方程

$$AD+DA'=-F \tag{5}$$

在 $V=\{ex'-xe':x\in\mathbb{R}^K\}$ 中有唯一解 D,且 $D=e(x^{(f)})'-x^{(f)}e'=A^{\#}\bar{f}e'-e\bar{f}'(A^{\#})'$. 这里 $F=e\bar{f}'-\bar{f}e'$.

定义 2 Lyapunov 方程(5)在 V 中唯一解 D 称为 Markov 过程 Y 关于 f 的实现矩阵,记为 $D^{(f)}$.

由上述定义可知,两个状态的势能差具有确定的意义,它即为实现矩阵 D 的一个元素,因此若选择一个势能参考点,比如取 $x_1=0$,则 $x_2,x_3,\cdots,x_k$ 恰为 D 的第一行元素(除对角线外),因而具有确定的意义,这就同物理学中的势能一样.势能本身具有明确的物理意义[5]. 关于现代 Markov 过程的势理论,可参看文献[6]. 下面给出稳态性能指标 η_f 关于参数 θ 摄动的灵敏度公式.

由(3)式可知,

$$\frac{\partial A}{\partial\theta}x^{(f)}+A\frac{\partial x^{(f)}}{\partial\theta}=\frac{\partial\eta_f}{\partial\theta}e,$$

两边左乘 P,因

$$PA=0,\quad Pe=1,$$

故有

$$\frac{\partial\eta_f}{\partial\theta}=P\frac{\partial A}{\partial\theta}x^{(f)}.$$

此外,易验证

$$-\frac{\partial A}{\partial\theta}A^{\#}\bar{f}=-\frac{\partial A}{\partial\theta}D^{(f)}P'=\frac{\partial A}{\partial\theta}x^{(f)}. \tag{6}$$

于是,可以得到稳态性能指标 η_f 关于参数 θ 的导数公式为

$$\frac{\partial\eta_f}{\partial\theta}=-P\frac{\partial A}{\partial\theta}A^{\#}\bar{f}= \tag{7}$$

$$-P\frac{\partial A}{\partial\theta}D^{(f)}P'= \tag{8}$$

$$P\frac{\partial A}{\partial\theta}x^{(f)}. \tag{9}$$

3 状态相关闭排队网络的灵敏度公式(Sensitivity formulas in closed state-dependent queueing networks)

在本节里,我们将运用上一节的结果,导出状态相关闭排队网络在其参数摄动下的稳态性能指标灵敏度公式.为此先介绍一下我们考虑的系统.

3.1 状态相关闭排队网络(Closed state-dependent queueing networks)

考虑一个闭的排队网络,它由 N 个单类顾客和 M 个单类 FCFS(先到先服务)服务节点组成,每位服务者都有无限容量的缓冲器.用 $\Gamma=\{1,2,\cdots,M\}$ 表示服务者指标集.顾客按照路径概率 $q_{i,j}$, $i,j\in\Gamma$,在各个服务者间运行.令 $Q=[q_{i,j}]$ 为路径概率矩阵,则其为一 Markov 矩阵.每位服务者的服务时间均服从指数分布,且设服务率与系统状态 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_M)$ 有关, n_i 表示服务者 i 处的顾客数.服务者 i 在系统状态为 n 时的服务率用 $\mu_{i,n}$ 表示. $\Phi=\{n=(n_1,n_2,\cdots,n_M):n_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{M}n_i=N\}$ 为状态空间,它共有 $K=\binom{N+M-1}{N}$ 个状态.设对所有 $i\in\Gamma$, $n\in\Phi$, $0<\mu_{i,n}<\infty$.

设 (Ω,F,P) 为服务时间随机变量定义在其上的概率空间,则这样一个网络的状态过程可用一个定义在 Ω 上右连续纯跳跃的 Markov 过程 $Y=\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 来描述,其状态空间为 Φ. 我们设 Y 是正常返的和不可约的,则其存在唯一的稳态分布 $p(n)$, $n\in\Phi$.

令

$$\epsilon(k)=\begin{cases}1, & k>0,\\ 0, & k=0,\end{cases} \tag{10}$$

和

$$\mu(n)=\sum_{i=1}^{M}\epsilon(n_i)\mu_{i,n}. \tag{11}$$

称 $\mu(n)$ 为系统状态处于 n 时网络的平均服务率.若

$$n = (n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots, n_M),$$

且 $n_i > 0$, 记

$$n_{i,j} = (n_1, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_j + 1, \cdots, n_M),$$

即 $n_{i,j}$ 表示由状态 n 经服务者 i 转移一个顾客到服务者 j 后所得的状态. 由于 Φ 中元素的排序对研究并不重要, 故用 P 表示其分量由所有稳态概率 $p(n), n \in \Phi$ 组成的 K 维行向量或 $1 \times K$ 矩阵, 并称 $p(n)$ 为 P 的第 n 个分量.

不难求得, Markov 过程 Y 的无穷小矩阵 A 的第 (n, m) 个元素为

$$a_{nm} = \begin{cases} \varepsilon(n_i)\mu_{i,n}q_{i,j} & m = n_{i,j}, \\ & i, j \in \Gamma,\ i \neq j, \\ \sum_{i=1}^{M}\varepsilon(n_i)\mu_{i,n}q_{i,j} - \mu(n), & m = n, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{12}$$

又记 α_n 为矩阵 A 的第 n 行元素组成的行向量, $\beta_{i,n} = \alpha_n - \mu_{i,n}\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial \mu_{i,n}}, i \in \Gamma, n \in \Phi$.

3.2 灵敏度公式(Sensitivity formulas)

仍设 $f: \Phi \to \mathbb{R}$ 为性能指标函数, 用 $\bar{f}$ 表示其第 n 个分量为 $f(n)$ 的 K 维列向量, 同样定义稳态性能指标为

$$\eta_f = \sum_{n \in \Phi} f(n)p(n) = P\bar{f}. \tag{13}$$

根据(9)式, 对所有 $i, j \in \Gamma, n \in \Phi$, 我们有

$$\mu_{i,n}\frac{\partial \eta_f}{\partial \mu_{i,n}} = p(n)[\eta_f - f(n) - \beta_{i,n}x^{(f)}], \tag{14}$$

$$\frac{\partial \eta_f}{\partial q_{i,j}} = P\frac{\partial A}{\partial q_{i,j}}x^{(f)}. \tag{15}$$

事实上, 由(9)式可知

$$\mu_{i,n}\frac{\partial \eta_f}{\partial \mu_{i,n}} = P\left(\mu_{i,n}\frac{\partial A}{\partial \mu_{i,n}}\right)x^{(f)}. \tag{16}$$

又由(12)式易知, 矩阵 $\mu_{i,n}\dfrac{\partial A}{\partial \mu_{i,n}}$ 除了第 n 行为 $\alpha_n - \beta_{i,n}$ 外, 其它行元素全为零. 再由(3)式可知,

$$\alpha_n x^{(f)} = -f(n) + \eta_f.$$

于是由(16)式立即得到(14)式. 而(15)式可由(9)式直接得到.

4 讨论和结论(Discussions and conclusions)

前面导出了状态相关闭排队网络在其参数摄动下的稳态性能指标灵敏度公式. 由(9)式可方便地导出负荷相关及状态无关闭排队网络相应的灵敏度公式. 显然关于参数 $q_{i,j}, i, j \in \Gamma$ 的灵敏度公式并无任何改变.

在负荷相关的情况下, 服务者 i 在状态 n 时的服务率为 $\mu_{i,n} = \mu_{i,n_i}$, 易求得

$$\mu_{i,k}\frac{\partial \eta_f}{\partial \mu_{i,k}} = \sum_{n_i = k} p(n)[\eta_f - f(n) - \beta_{i,n}x^{(f)}],$$

$$k = 1, 2, \cdots, N, \quad i \in \Gamma. \tag{17}$$

这里 $\sum_{n_i = k}$ 表示对所有满足 $n_i = k$ 的 $n \in \Phi$ 求和. 类似地, 可求得在状态无关的情况下, 相应的灵敏度公式为

$$\mu_i\frac{\partial \eta_f}{\partial \mu_i} = \sum_{n \in \Phi} p(n)[\eta_f - f(n) - \beta_{i,n}x^{(f)}], \quad i \in \Gamma. \tag{18}$$

从前面的讨论可以看出, 运用本文所述方法导出的稳态性能指标灵敏度公式, 基本上不需要附加额外的条件, 不象在文献[1]中讨论的那样, 要求网络满足可积性条件, 因此更具有一般性. 最后我们要特别指出的是, 本文结果的重要性在于, 一方面, 这些公式在理论上十分有用; 另一方面, 由于稳态概率和势能均可从网络的一条样本轨道上, 获得其精确估计量, 故可运用这些公式对网络作灵敏度分析, 进而可直接用于网络的优化. 关于基于单一样本轨道稳态概率和势能的估计算法, 可参看文献[5].

致谢 本文是在曹希仁教授的启发和指导下完成的, 在此向曹教授表示最诚挚的谢意!

参考文献(References)

1 Cao X R. Realization probabilities: the dynamics of queueing systems. New York: Springer-Verlag, 1994

2 Cao X R. An overview of perturbation analysis. 秦化淑主编, 中国控制会议论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1995, 22 – 39

3 邓永录. 随机模型及其应用. 北京: 高等教育出版社, 1994

4 Carl D M and Jr. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains. SIAM Review, 1975, 17(3): 443 – 464

5 Cao X R and Chen H F. Perturbation realization, potentials, and sensitivity analysis of Markov processes. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, 42(10): 1382 – 1393

6 John G, Kemeny J, Laurie S and Anthony W K. Denumerable Markov Chains. New York: Springer-Verlag, 1976

本文作者简介

殷保群 1962 年生. 1985 年毕业于四川大学数学系. 现为中国科学技术大学自动化系副教授, 博士. 主要从事非线性系统展开理论, 排队网络性能指标灵敏度分析、优化及在通讯网络中应用等方面的研究.

(下转第 261 页)

本文作者简介

王忠勇　1965年生.1988年哈尔滨工程大学研究生毕业,1998年在西安交通大学获工学博士学位,现为郑州大学副教授.研究方向为非线性控制系统中的混沌与分叉,过程控制等.

蔡远利　1963年生.1990年在西北工业大学获工学博士学位,1991年～1992年为西安交通大学力学博士后流动站研究人员,现为西安交通大学副教授.研究方向为非线性控制系统中的混沌与分叉,人工神经网络控制技术,飞行器制导、控制与仿真等.

刘文江　1934年生.1956年交通大学研究生毕业,现为西安交通大学教授,博士生导师.目前的研究方向是参量检测及过程控制等.

(上接第257页)

周亚平　1963年生.1984年毕业于中国科学技术大学自动化系.现为中国科学技术大学管理科学系副教授,并在中国科学技术大学自动化系攻读在职博士学位.主要从事经济管理系统,排队网络性能指标灵敏度仿真估计及优化等方面的研究.

杨孝先　1937年生.1958年毕业于云南大学数学系,现为中国科学技术大学数学系教授.长期从事随机系统控制、优化及应用方面的研究.

奚宏生　1950年生.1977年毕业于中国科学技术大学数学系,现为中国科学技术大学自动化系教授.长期从事鲁棒控制,离散事件动态系统及其应用等方面的研究.

孙德敏　1939年生.1964年毕业于中国科学技术大学,并留校任教至今.现为中国科学技术大学自动化系主任,教授,博士生导师,中国自动化学会理事,中国自动化学会控制理论专业委员会委员.长期从事工业控制过程先进控制和优化及伺服系统综合方面的研究.