

## SISO 系统的鲁棒性能设计\*

恒庆海

(天津大学电气自动化与能源工程学院·天津, 300072)

王毅 何雨奋 王广雄

贺家李

(哈尔滨工业大学航天学院·哈尔滨, 150001) (天津大学电气自动化与能源工程学院·天津, 300072)

**摘要:** 本文讨论了 SISO 系统的鲁棒性能设计问题. 根据具有乘性不确定性 SISO 系统鲁棒性能指标  $\mu$  的显式表达式, 分析了  $\mu$  综合中权函数的选择. 文中还配有例题进行说明.

**关键词:** 鲁棒性能;  $\mu$ -综合; SISO 系统; 权函数

## Robust Performance Design for SISO Systems

Heng Qinghai

(School of Electrical Automation and Energy Engineering, Tianjin University, Tianjin, 300072, P. R. China)

Wang Yi, He Yufen and Wang Guangxiong

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, P. R. China)

He Jiali

(School of Electrical Automation and Energy Engineering, Tianjin University, Tianjin, 300072, P. R. China)

**Abstract:** This paper deals with the robust performance design problem of SISO systems. The selections of weighting functions are studied based on an explicit formula for the robust performance specification  $\mu$  of a SISO system with a multiplicative uncertainty. Examples are also given in this paper.

**Key words:** robust performance;  $\mu$ -synthesis; SISO systems; weighting functions

### 1 引言(Introduction)

$\mu$  综合是系统鲁棒性能设计方法, 但如果性能权函数选择不当, 即使用  $\mu$  综合也得不到好的鲁棒性能. 根据具有乘性不确定性 SISO 系统鲁棒性能指标  $\mu$  的显式表达式, 可以分析权函数在系统鲁棒性能设计中的作用及其选择方法.

### 2 SISO 系统的鲁棒性能设计 (Robust performance design for SISO systems)

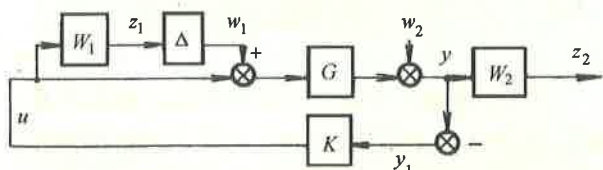


图 1 具有乘性不确定性的鲁棒性能问题

Fig. 1 A problem of robust performance with multiplicative uncertainty

图 1 是鲁棒性能问题的典型框图, 并可整理成图 2 的标准形式, 图中

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -W_1 K(I + GK)^{-1} G & -W_1 K(I + GK)^{-1} \\ W_2(I + GK)^{-1} G & W_2(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

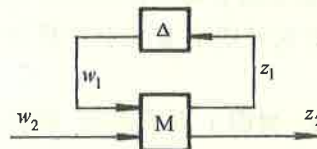


图 2 鲁棒性能标准问题

Fig. 2 Standard problem of robust performance

对图 1 所示具有乘性不确定性 SISO 系统,

$$\mu(M) = \inf_D \bar{\sigma}(DMD^{-1}) = \inf_D \bar{\sigma}(DMD^{-1}). \quad (2)$$

其中定标阵  $D$  的形式为<sup>[1]</sup>

$$D = \text{diag}(d, 1). \quad (3)$$

因为

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) &= \\ \bar{\sigma} \left( \begin{bmatrix} M_{11} & dM_{12} \\ d^{-1}M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) &= \\ (|M_{11}|^2 + |M_{22}|^2) + (|dM_{12}|^2 + |d^{-1}M_{21}|^2) &+ \end{aligned}$$

\* 天津大学青年教师和留学回国人员基金资助.  
本文于 1996 年 1 月 8 日收到, 1998 年 5 月 4 日收到修改稿.

$$\begin{aligned} & ((|M_{11}|^2 + |M_{22}|^2) + \\ & (|dM_{12}|^2 + |d^{-1}M_{21}|^2))^2 - \\ & 4|M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}|^2)^{1/2} / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

由初等数学知识,式(4)对  $d$  取极小的充要条件为

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow |dM_{12}|^2 + |d^{-1}M_{21}|^2 \text{ 取极小} \\ & \Leftrightarrow |dM_{12}|^2 + |d^{-1}M_{21}|^2 = \\ & 2|M_{12}M_{21}|, \end{aligned}$$

且  $|dM_{12}| = |d^{-1}M_{21}|$ .  
由此得

$$d = d^* = \sqrt{|M_{21}| / |M_{12}|}. \quad (5)$$

这里  $d^*$  表示使式(4)极小化的  $d$ .

将式(5)代入式(4)得  $\sigma(DMD^{-1})$  的极小值

$$\begin{aligned} v(M) = & (|M_{11}|^2 + |M_{22}|^2 + 2|M_{12}M_{21}| + \\ & ((|M_{11}|^2 + |M_{22}|^2 + 2|M_{12}M_{21}|)^2 - \\ & 4|M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}|^2)^{1/2})^{1/2} / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

由数学分析可知,此极小值一定是下确界.又由式(2)得

$$\mu(M) = v(M). \quad (7)$$

考虑到式(1),可得

$$\mu(M) = |W_2S| + |W_1T|, \quad (8)$$

$$d^* = \sqrt{|W_2G| / |W_1K|}. \quad (9)$$

式(8)可用于  $\mu$  综合中的  $\mu$  值分析,而式(9)则就是 D-K 迭代中的极小化  $d^*$ .利用式(8)和式(9)可简化 SISO 系统的  $\mu$  综合过程,使鲁棒性能设计简洁明了.式(8)也可用于  $\mu$  综合中性能权函数的选择.

**例题 2.1** 对图 1 所示系统,设被控对象传递函数为

$$G'(s) = \frac{1}{s+1}e^{-\tau s}, \quad (\tau < 0.5) \quad (10)$$

名义对象取为

$$G(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (11)$$

取乘性不确定性的权函数

$$W_1(s) = \frac{0.5s + 0.01}{0.25s + 1}. \quad (12)$$

性能权函数按式(13)来取

$$W_2(s) = 0.5 \frac{s + \rho}{s}. \quad (13)$$

在  $\mu$  综合求解中调整  $\rho = 2.62$ ,降阶处理后得控制器

$$K_1(s) = 1.324 \frac{(10s+1)(0.25s+1)(1.226s+1)}{s(0.022s+1)(9.058s+1)}. \quad (14)$$

系统对输出端阶跃扰动的时间响应见图 3 中曲线 1,图中曲线 2 为摄动后的响应曲线.

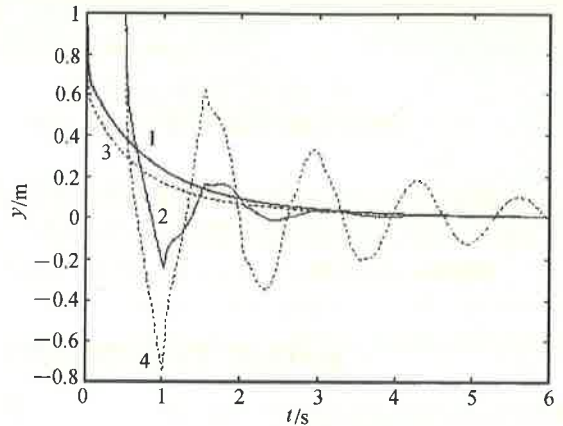


图 3  $\mu$  综合的不同设计结果  
曲线 1,2: 性能权  $W_2=0.5(s+\rho)/s$   
曲线 3,4: 性能权  $W_2=0.5\rho/s$

Fig. 3 The results of difference of  $\mu$ -synthesis  
Curve 1,2: performance weighting  $W_2=0.5(s+\rho)/s$   
Curve 3,4: performance weighting  $W_2=0.5\rho/s$

### 3 性能权函数的选择 (Selection of performance weighting functions)

根据式(8)分析,当按  $\mu \leq 1$  设计时可以保证  $|W_1T| < 1$ .即鲁棒性能的设计结果是  $|W_1T| < 1$ ,而不是  $|W_1T| \leq 1$ .也就是说在稳定性方面留出裕度,使摄动后性能变化不大,而不是趋向稳定边界,这个特点是由性能权(式(13))来保证的.

如果性能权  $W_2(s)$  按一般取法,取成

$$W_2(s) = \frac{0.5\rho}{s}, \quad (15)$$

同样用  $\mu$  设计,得  $\rho = 3.4$  时的控制器

$$K_2(s) = 1.721 \frac{(0.25s+1)(10s+1)(1.417s+1)}{s(0.018s+1)(9.363s+1)}. \quad (16)$$

图 3 中曲线 3 为此名义系统的输出端阶跃扰动响应,曲线 4 为摄动后的响应.可见采用这种性能权的设计结果,摄动后的性能变差,趋向振荡(为了对两种  $\mu$  综合设计结果性质的精确比较,图 3 中均采用的是未经降阶处理的控制器).

上述分析说明,即使用  $\mu$  综合法设计,也还得注意性能权的选择.  $W_2$  应该具有式(13)的形式.

### 4 结论 (Conclusions)

本文根据具有乘性不确定性 SISO 系统鲁棒性能指标  $\mu$  的显式表达式,分析了  $\mu$  综合中权函数的

选择,指出:

1)  $\mu$  综合中性能权函数的选择宜取其式为式(13)的形式,即应在整个频域中来定义.

2) 从式(8)和(13)可以看出,由于有  $W_2S$  分量,所以鲁棒性能的设计结果是  $|W_1T| < 1$ ,而不是  $|W_1T| \leq 1$ ,即有一定裕度.

3) 本文关于权函数的讨论对 MIMO 系统也有参考意义.

### 参考文献(References)

1 Doyle J C, Wall J E and Stein G. Performance /and Robustness Analysis for Structured Uncertainty. Proc. of 21th IEEE Conf. on Deci. and Contr., 1982,629 - 636

2 Safonov M G and Chiang R Y. CACSD using the state-space  $L_\infty$  theory—a design example. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, 33(5): 477 - 479

### 附录(Appendix)

为了对两种  $\mu$  综合设计结果性质的精确比较,给出未经降阶处理的控制器  $K_1(s), K_2(s)$ . 其中设控制器形式为:

$$K(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

1) 对控制器  $K_1(s)$ .

$$k = 7.7160 \times 10^{-7}$$

$$z = -2.1732 \times 10^8 \quad p = -1.4792 \times 10^3$$

$$\begin{array}{ll} -10^5 & -10^3 \\ -7.5779 \times 10^2 & -420.0759 \\ -0.1 & -45.6648 \\ -4 & -10-5 \\ -0.8157 & -0.1104 \end{array}$$

2) 对控制器  $K_2(s)$ .

$$k = 2.9061 \times 10^2$$

$$z = -10^5 \quad p = -1.6665 \times 10^3$$

$$-10^3 \quad -4.9160 \times 10^2$$

$$-0.7059 \quad -10^3$$

$$-0.1 \quad -54.4094$$

$$-4 \quad -10^{-5}$$

$$-0.1068$$

### 本文作者简介

恒庆海 1964年生.1996年于哈尔滨工业大学自动控制理论及应用专业获博士学位,1998年于天津大学电工学获博士后证书.现为天津大学电气自动化与能源工程学院副教授.目前主要研究方向为  $H_\infty$  控制,锅炉过热汽温控制,电机控制等.

王 毅 1967年生.1995年于哈尔滨工业大学获硕士学位,现在哈尔滨工业大学惯导测试设备中心从事科研工作.目前主要研究方向是计算机控制系统.

何雨奋 1968年生.1997年于哈尔滨工业大学获博士学位,现为北京航空航天大学博士后.目前主要研究方向为鲁棒控制系统设计.

王广雄 见本刊1999年第2期第240页.

贺家李 1925年生.1962年于原苏联莫斯科动力学院获技术科学副博士学位.现为天津大学教授,博士生导师.研究方向为电力系统故障分析,超高压输电线路的微机保护等.