第16卷第2期
1999年4月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.16,No.2
Apr.,1999

一类具有状态及控制滞后的不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制

顾永如　王守臣　钱积新
(浙江大学工业控制技术研究所·浙江大学电机系·杭州,310027)

摘要:本文就一类具有状态及控制滞后的不确定动态系统,研究了其鲁棒 H_∞ 控制.文中提出了一种鲁棒无记忆 H_∞ 控制器的设计方法,该控制器在鲁棒镇定系统的同时,能保证闭环系统从扰动到被控输出的 H_∞ 范数小于某一给定的常数.

关键词:时滞系统;不确定性;鲁棒 H_∞ 控制;Riccati 方程

Robust H_∞ Control for a Class of Uncertain Dynamic Systems with Delayed States and Controls

Gu Yongru,　Wang Shouchen　and　Qian Jixin
(Institute of Industrial Process Control,Department of Electrical Engineering Zhejiang University·Hangzhou,310027,P.R.China)

Abstract: This paper focuses on the problem of robust H_∞ control for a class of uncertain dynamic systems with delayed states and controls. An approach is proposed for designing a memoryless state feedback control law which will stabilizes the systems and, simultaneously, guarantees a prespecified H_∞ disturbance attenuation constraint for all admissible uncertainties.

Key words: time delay systems; time-varying uncertainty; robust H_∞ control; Riccati equation

1　引言(Introduction)

近年来,H_∞控制理论得到了迅速发展,许多 H_∞ 控制器设计方法被提了出来,其中一种设计方法是通过求解代数 Riccati 方程(ARE)来获得控制器.在文[1]中首次采用 ARE 解决了一类无时滞确定性系统的 H_∞ 控制器的设计问题,文[2]基于 ARE 对一类时变不确定无时滞系统研究了其鲁棒 H_∞ 控制,但对于含有时滞的系统的 H_∞ 控制器设计报道尚少.为了解决具有控制滞后的线性系统的 H_∞ 控制器的设计问题,Foias 等[3]采用了泛函分析技术,但如文[4]指出,这种方法对含有状态滞后的系统并不适用.在文[4,5]中,基于 ARE 的 H_∞ 控制器设计方法被推广到含有时滞的线性系统,但对于系统参数的不确定性并未考虑.本文针对一类同时含有状态和控制滞后的不确定性系统研究了其 H_∞ 控制,给出了基于 ARE 的 H_∞ 控制器设计方法,该控制器使系统鲁棒稳定的同时,能保证闭环系统从扰动输入到被控输出的 H_∞ 范数小于某一给定的常数.在下述文中,符号 $P>0$ 表示对称矩阵 P 是正定的,$P>Q$ 表示 $P-Q>0$,而 $L_2[0,\infty)$ 代表在 $[0,\infty)$ 上平方可积的函数空间,$\|\cdot\|_2$ 表示 $L_2[0,\infty)$ 范数,$\|\cdot\|$ 则表示矢量的 Euclidean 范数或矩阵的谱范数.

2　问题描述(Problem formulation)

考虑由下述方程描述的系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=[A_0+\Delta A(\alpha(t))]x(t)+[B_0+\Delta B(\beta(t))]\cdot \\ \qquad u(t)+[A_{d0}+\Delta A_d(\delta(t))]x(t-\tau_1(t))+ \\ \qquad [B_{d0}+\Delta B_d(\sigma(t))]u(t-\tau_2(t))+Dw(t), \\ z(t)=Ex(t), \\ x(t)=\phi(t),\quad t\in[-\bar{\tau},0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 是系统状态在 t 时间的值,$u(t)\in\mathbb{R}^m$ 是控制向量,$w(t)\in\mathbb{R}^p$ 为平方可积的干扰输入矢量,$z(t)\in\mathbb{R}^q$ 是被控输出,$\alpha(t)\in\mathbb{R}^{k_1}$,$\beta(t)\in\mathbb{R}^{k_2}$,,$\delta(t)\in\mathbb{R}^{k_3}$,$\sigma(t)\in\mathbb{R}^{k_4}$ 为不确定参数.A_0,A_{d0},B_0,B_{d0},D 和 E 是具有适当维数的常数矩阵,τ_1 及 τ_2 为时滞且设满足 $\tau_1,\tau_2\leqslant\bar{\tau}<\infty$ 和 $\dot{\tau}_1\leqslant\bar{m}_1<1$,$\dot{\tau}_2\leqslant\bar{m}_2<1$,(注:$\tau_1$ 和 τ_2 为定常情况只是本文所考虑的一种特殊情况,此时 $\dot{\tau}_1=0$ 和 $\dot{\tau}_2=0$).$\phi(\cdot)$ 为连续函数,同时设 $\alpha(\cdot)$,$\beta(\cdot)$,$\delta(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 为 Lebesque-可测,并且分别属于如下紧集 Ω_1,Ω_2,Ω_3,Ω_4:

$$\Omega_1\equiv\{\alpha:|\alpha_i|\leqslant\bar{\alpha},i=1,2,\cdots,k_1\},$$

本文于1996年12月9日收到.1997年12月15日收到修改稿.

$$\Omega_2 \equiv \{\beta: |\beta_i| \leqslant \bar{\beta}, i = 1,2,\cdots,k_2\},$$
$$\Omega_3 \equiv \{\delta: |\delta_i| \leqslant \bar{\delta}, i = 1,2,\cdots,k_3\},$$
$$\Omega_4 \equiv \{\sigma: |\sigma_i| \leqslant \bar{\sigma}, i = 1,2,\cdots,k_4\}, \tag{2}$$

同时,我们进一步假设不确定性满足秩1型,也即

$$\Delta A(\alpha) = \sum_{i=1}^{k_1} A_i\alpha_i(t),\ \Delta B(\beta) = \sum_{i=1}^{k_2} B_i\beta_i(t),$$

$$\Delta A_d(\delta) = \sum_{i=1}^{k_3} A_{di}\delta_i(t),\ \Delta B_d(\sigma) = \sum_{i=1}^{k_4} B_{di}\sigma_i(t),$$

且 A_i, B_i, A_{di} 和 B_{di} 满足形式

$$A_i = d_ie_i^{\mathrm{T}}, \quad B_i = f_ig_i^{\mathrm{T}},$$
$$A_{di} = l_iq_i^{\mathrm{T}}, \quad B_{di} = h_is_i^{\mathrm{T}},$$

及

$$d_i, e_i, f_i, q_i, h_i \in \mathbb{R}^n, \quad g_i, s_i \in \mathbb{R}^m.$$

为今后进一步使用,我们引进如下记号

$$\begin{cases} T \equiv \bar{\alpha}\sum_{i=1}^{k_1} d_id_i^{\mathrm{T}}, & U \equiv \bar{\alpha}\sum_{i=1}^{k_1} e_ie_i^{\mathrm{T}}, \\ V \equiv \bar{\beta}\sum_{i=1}^{k_2} g_ig_i^{\mathrm{T}}, & W \equiv \bar{\beta}\sum_{i=1}^{k_2} f_if_i^{\mathrm{T}}, \\ H \equiv \bar{\delta}\sum_{i=1}^{k_3} l_il_i^{\mathrm{T}}, & M \equiv \bar{\delta}\sum_{i=1}^{k_3} q_iq_i^{\mathrm{T}}, \\ X \equiv \bar{\sigma}\sum_{i=1}^{k_4} h_ih_i^{\mathrm{T}}, & Y \equiv \bar{\sigma}\sum_{i=1}^{k_4} s_is_i^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{3}$$

对系统(1),考虑构造状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ ($K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为一常数矩阵)使得下面两条件成立:

1)闭环系统一致渐近稳定;

2)零初值条件下,被控输出满足:

$$\|z\|_2 \leqslant \gamma\|w\|_2, \quad \gamma > 0.$$

若满足该两条件的控制器 $u(t) = Kx(t)$ 存在,则称系统(1)是具有 H_∞ 范数界 γ 可镇定.

3 主要结果(Main results)

定理1 给定正常数 γ,考虑系统(1),假设对于某一正标量 ε 和正定阵 R_0 和 Q,ARE(4)存在一正定解 P,则当采用控制器(5)时,系统(1)是具有 H_∞ 范数界 γ 可镇定的.

$$PA_0 + A_0^{\mathrm{T}}P - P\hat{R}P + U + \frac{1}{1-\bar{m}_1}M + \frac{1}{1-\bar{m}_1}I_n + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm{T}}E + \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm{T}}P = -\varepsilon Q, \tag{4}$$

$$u = -\frac{1}{\varepsilon}R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Px(t), \tag{5}$$

其中

$$\hat{R} = \frac{1}{\varepsilon}(B_0R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\bar{m}_2}B_{d0}R_0^{-1}B_{d0}^{\mathrm{T}} - (B_0R_0^{-1}(V+Y)R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\bar{m}_2}X - W) - T - H - A_{d0}A_{d0}^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

证 首先我们来证系统(1)在控制器(5)下是一致渐近稳定的,由式(1)和(5),我们可得闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{0c}x(t) + A_{dc}x_{\tau_1} + B_{dc}x_{\tau_2} + Dw(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \leqslant 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 x_{τ_1} 和 x_{τ_2} 分别表示 $x(t-\tau_1)$ 和 $x(t-\tau_2)$,

$$A_{0c} = A_0 + \Delta A - \frac{1}{\varepsilon}B_0R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P - \frac{1}{\varepsilon}\Delta BR_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P,$$
$$A_{dc} = A_{d0} + \Delta A_d,$$
$$B_{dc} = -\frac{1}{\varepsilon}(B_{d0} + \Delta B_d)R_0^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P.$$

考虑如下的 Lyapunov 函数

$$L(x) = x^{\mathrm{T}}Px + \frac{1}{1-\bar{m}_1}\cdot \int_{t-\tau_1}^{t} x(\theta)^{\mathrm{T}}(I_n + M)x(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\tau_2}^{t} x(\theta)^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1} + R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{8}$$

则存在 $c_1, c_2 > 0$,使如下不等式成立

$$c_1\|x(t)\|^2 \leqslant L(x) \leqslant \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} c_2\|x(t+\theta)\|^2, \tag{9}$$

当无干扰输入时,$L(x)$ 沿系统(7)的导数为

$$\dot{L} = 2x^{\mathrm{T}}P(A_{0c}x + A_{dc}x_{\tau_1} + B_{dc}x_{\tau_2}) + \frac{1}{1-\bar{m}_1}x^{\mathrm{T}}(I_n + M)x - \frac{1-\dot{\tau}_1}{1-\bar{m}_1}x_{\tau_1}^{\mathrm{T}}(I_n + M)x_{\tau_1} + \frac{1}{\varepsilon}x^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1} + R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px - \frac{1-\dot{\tau}_2}{\varepsilon}x_{\tau_2}^{\mathrm{T}}PB_0(R_0^{-1} + R_0^{-1}YR_0^{-1})B_0^{\mathrm{T}}Px_{\tau_2}, \tag{10}$$

采用如下事实

$$2x^{\mathrm{T}}P\Delta Ax = 2x^{\mathrm{T}}P\sum_{i=1}^{k_i} d_ie_i^{\mathrm{T}}\alpha_i(t)x \leqslant x^{\mathrm{T}}PTPx + x^{\mathrm{T}}Ux;$$

$$-2x^TP\Delta BR_0^{-1}B_0^TPx \leqslant x^TPWPx + x^TPB_0R_0^{-1}VR_0^{-1}B_0^TPx;$$
$$2x^TP\Delta A_dx_{\tau_1} \leqslant x^TPHPx + x_{\tau_1}^TMx_{\tau_1};$$
$$-2x^TP\Delta B_dR_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_1} \leqslant \frac{1}{1-\bar{m}_2}x^TPXPx + (1-\bar{m}_2)x_{\tau_2}^TPB_0R_0^{-1}YR_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_2};$$
$$2x^TPA_{d0}x_{\tau_1} \leqslant x^TPA_{d0}A_{d0}^TPx + x_{\tau_1}^Tx_{\tau_1}. \tag{11}$$

并代入式(10)有

$$\dot{L} \leqslant x^T\hat{S}x - \frac{2}{\varepsilon}xPB_{d0}R_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_2} - \frac{1-\bar{m}_2}{\varepsilon}x_{\tau_2}^TPB_0R_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_2} = -\bar{x}^T\bar{Q}\bar{x}. \tag{12}$$

其中

$$\hat{S} = PA_0 + A_0^TP - P[\hat{R} + \frac{1}{\varepsilon(1-\bar{m}_2)}B_{d0}R_0^{-1}B_{d0}^T]P + U + \frac{1}{1-\bar{m}_1}(M + I_n),$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} -\hat{S} & PB_{d0}R_0^{-1} \\ R_0^{-1}B_{d0}^TP & (1-\bar{m}_2)\varepsilon R_0^{-1} \end{bmatrix}$$

和

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} X \\ \frac{1}{\varepsilon}B_0^TPx_{\tau_2} \end{bmatrix}.$$

由文献[6]知,矩阵 $\hat{Q}$ 正定当且仅当

$$\hat{S} + \frac{1}{\varepsilon(1-\bar{m}_2)}PB_{d0}R_0^{-1}B_{d0}^TP < 0, \tag{13}$$

因此当 ARE(4)对于某一正标量 ε 和正定阵 R_0 和 Q,存在正定解 P 时,有式(13)成立,此时,一定存在正常数 c_3 使得

$$\dot{L}(x_t) \leqslant -c_3\|\bar{x}\|^2 \leqslant -c_3\|x\|^2 < 0$$

成立,由文[7]的结论,闭环系统是鲁棒一致渐近稳定的.

下面证明在零初始条件下,被控输出 z 满足 $\|z\|_2 \leqslant \gamma\|w\|_2$. 设初始条件为零,也即 $x(t) = 0(t \leqslant 0)$,同时引入 $J = \int_0^\infty(\frac{1}{\gamma}z^Tz - \gamma w^Tw)\mathrm{d}t$,则对于任何 $w \in L_2[0,\infty)$,有(可参见[2])

$$J \leqslant \int_0^\infty[\frac{1}{\gamma}z^Tz - \gamma w^Tw + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L(x))]\mathrm{d}t, \tag{14}$$

根据式(12),我们有

$$J \leqslant \int_0^\infty\{\frac{1}{\gamma}x^TE^TEx - \gamma w^Tw + x^T\hat{S}x - \frac{2}{\varepsilon}x^TPB_{d0}R_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_2} - \frac{1-\bar{m}_2}{\varepsilon}x_{\tau_2}^TPB_0R_0^{-1}B_0^TPx_{\tau_2} + 2x^TPDw\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty -\bar{x}^T\hat{Q}\bar{x}\mathrm{d}t - \int_0^\infty(\sqrt{\gamma}w - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}D^TPx)^T(\sqrt{\gamma}w - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}D^TPx)\mathrm{d}t, \tag{15}$$

其中

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} -\hat{S} - \frac{1}{\gamma}E^TE - \frac{1}{\gamma}PDD^TP & PB_{d0}R_0^{-1} \\ R_0^{-1}B_{d0}^TP & (1-\bar{m}_2)\varepsilon R_0^{-1} \end{bmatrix}.$$

由式(8),我们可很容易得到如下不等式

$$\hat{S} + \frac{1}{\varepsilon(1-\bar{m}_2)}PB_{d0}R_0^{-1}B_{d0}^TP + \frac{1}{\gamma}E^TE - \frac{1}{\gamma}PDD^TP < 0, \tag{16}$$

则由[6]可得到 $\hat{Q}$ 是正定的. 因此,有 $J \leqslant 0$, 也就是

$$\|z\|_2^2 \leqslant \gamma^2\|w\|_2^2,$$

也即

$$\|z\|_2 \leqslant \gamma\|w\|_2. \tag{17}$$

证毕.

注　求解 ARE(8)的算法可参见文献[8].

4 数值算例(Numerical example)

考虑系统(1),规定 $\gamma = 1$, 且其中

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \dot{\tau} < 0.1,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{d0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{d0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E = [1\quad 1],\ \Delta A(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Delta B(\beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_d(\delta) = \begin{bmatrix} \delta & \delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \Delta B_d(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix},$$

$$|\alpha|, |\beta|, |\delta|, |\sigma| \leqslant 0.1.$$

$$A_1 = d_1e_1^T,\quad B_1 = f_1g_1^T,\quad A_{d1} = l_1q_1^T,$$

$$B_{d1} = h_1s_1^T,\quad d_1 = l_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad e_1 = q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$f_1 = h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad g_1 = s_1 = 1$$

和

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\delta} = \bar{\sigma} = 0.1.$$

采用类似文[8]的算法,在 $R_0=1, Q=I_2$ 和 $\varepsilon=0.05$,可得到 ARE(4)的一正定解为

$$p=\begin{bmatrix}5.7742 & 1.1853\\ 1.1853 & 0.5261\end{bmatrix},$$

则采用控制器 $u=-23.7052x_1-10.5227x_2$ 时,该系统是具有 H_∞ 范数界 $\gamma=1$ 可镇定.

参考文献(References)

1 Petersen I R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(5): 427 – 429

2 Xie L and de Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(8): 1188 – 1191

3 Foias C, Tannenbaum A and Zames G. Weighted sensitivity minimization for delayed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1986, 31(8): 763 – 766

4 Lee J H, Kim S W and Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(1): 159 – 162

5 Choi H H and Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control. Automatica, 1995, 31(6): 917 – 919

6 Kreindler E and Jameson A. Conditions for nonnegativeness of partitioned matrices. IEEE Trans. Automat. Contr., 1972, 17(1): 147 – 148

7 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

8 Petersen I R and Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems, Automatica, 1986, 22(4): 394 – 411

本文作者简介

顾永如 见本刊1999年第1期第151页.

王守臣 1970年生.1992年毕业于南京理工大学机械系,1995年于该校获硕士学位,现为浙江大学电机系博士研究生.主要研究方向为鲁棒控制及智能控制.

钱积新 见本刊1999年第1期第104页.

(上接第274页)

4 Iwasaki I and Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307 – 1317

本文作者简介

席 斌 1963年生.1985年于安徽机电学院、1992年于合肥工业大学分别获工学学士和工学硕士学位.1998年在浙江大学工业控制系获博士学位,现在厦门大学自动化系任教.研究方向为鲁棒控制的工业应用.

吴铁军 1950年生.1988年获浙江大学工业自动化专业博士学位,现为该校工业控制研究所教授,博士生导师,工业控制技术国家重点实验室副主任,中国自动化学会智能自动化委员会委员.目前研究领域为大系统智能控制,非线性控制,离散事件动态系统及其复杂工业过程中的应用.