第 16 卷第 2 期
1999 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.2
Apr., 1999

不确定离散系统的最优鲁棒滤波

吴淮宁　费元春
(北京理工大学电子工程系·北京,100081)

摘要: 本文对一类含有范数有界参数不确定的离散线性系统的滤波问题进行了研究.考虑了有限时域时变以及无限时域时不变两种情形.给出了一个对所有可容许参数不确定都能满足的估计误差方差上界,得到了使得该上界达到最小的最优鲁棒滤波器形式及其存在的充要条件.数值结果表明:当系统存在参数不确定时,本文所得到的滤波器优于标准的 Kalman 滤波器以及文[4]中的鲁棒滤波器.

关键词: 不确定离散系统; Kalman 滤波; Riccati 方程; 鲁棒性

Optimal Robust Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems

Wu Huaining　and　Fei Yuanchun
(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology·Beijing, 100081, P.R.China)

Abstract: This paper deals with the robust filtering problem for uncertain, linear, dicrete-time systems, and considers the finite horizon time-varying case and the infinite horizon time-invariant case. An upper bound on the variance of the estimation error is found for all admissible parameter uncertainties. The necessary and sufficient conditions of existence, and state-space formulas for an optimal robust filter are obtained in the sense of error variance upper bound. It is also demonstrated, via an example, that the proposed filter performs far better than the standard Kalman filter or robust Kalman filter in [4] when the parameter uncertainty exists.

Key words: uncertain discrete-time systems; Kalman filtering; Riccati equation; robustness

1　引言(Introduction)

Kalman 滤波是信号估计的一个重要方法,并已广泛应用于许多工程问题当中.由于这种方法不能鲁棒克服系统模型的参数摄动,因此,鲁棒滤波问题的研究是十分重要的.

近年来,许多学者都对一类含有范数有界参数不确定线性系统的鲁棒滤波问题进行了研究[1~3],得到了一个使得估计误差方差上界达到最小意义上的"最优"鲁棒滤波器.然而他们考虑的都是连续时间情形.虽然文[4,5]分别为这类不确定离散系统提供了一种鲁棒滤波器的设计方法,但文[4]给出的滤波器从误差方差上界意义上来讲是次优的.而文[5]所给的鲁棒最小方差时变滤波器不能保证其收敛,仅提供了极限滤波器存在的一个必要条件.所以,本文重新研究了这类不确定离散系统的鲁棒滤波问题,考虑了有限时域时变以及无限时域时不变两种情形,得到了一个对所有可容许的参数不确定都满足的估计误差方差上界,并导出了使得该界达到最小意义上的最优鲁棒滤波器形式及其存在的充要条件.最后,我们还通过一个数值例子验证了所提供方法的有效性.

2　问题描述(Problem statement)

考虑如下不确定离散线性时变系统:

$$x_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)x_k + B_k w_k,$$
$$0 \leqslant k \leqslant N-1, \quad x_0 = \bar{x}_0, \tag{1}$$
$$y_k = (C_k + \Delta C_k)x_k + D_k w_k, \tag{2}$$
$$z_k = L_k x_k, \tag{3}$$

这里 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为状态,$y_k \in \mathbb{R}^m$ 为测量输出,$z_k \in \mathbb{R}^q$ 为被估计量,$w_k \in \mathbb{R}^p$ 为噪声,A_k, B_k, C_k, D_k 与 L_k 均为具有适当维数的已知标称系统矩阵.初始状态 $\bar{x}_0$ 为一个均值为零的随机向量.而 ΔA_k 与 ΔC_k 为系统的参数不确定,假定可容许的参数不确定为

$$\Delta A_k = H_{1,k}F_kE_k, \quad \Delta C_k = H_{2,k}F_kE_k, \tag{4}$$

这里

$$F_k \in \mathbb{R}^{i\times j}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

为一个未知的矩阵,满足

$$F_kF_k^{\mathrm{T}} \leqslant I_i. \tag{5}$$

而 $H_{1,k}, H_{2,k}$ 与 E_k 为具有适当维数的已知矩阵.对于 $0 \leqslant k, l \leqslant N-1$,我们假定

本文于 1997 年 3 月 21 日收到. 1998 年 5 月 18 日收到修改稿.

i) 当 $k = l$ 时，$E\{w_k w_l^T\} = I_p$；当 $k \neq l$ 时，$E\{w_k w_l^T\} = 0$，其中 $E\{\cdot\}$ 表示期望.

ii) $E\{\bar{x}_0 \bar{x}_0^T\} = R_0 \leqslant R$，其中 $R = R^T > 0$，且 $E\{w_k \bar{x}_0^T\} = 0$.

考虑如下线性滤波器

$$\hat{x}_{k+1} = A_{e,k}\hat{x}_k + K_k(y_k - C_k\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0, \tag{6}$$

$$\hat{z}_k = L_k\hat{x}_k. \tag{7}$$

我们的目的就是选择滤波器参数矩阵 $A_{e,k}$ 与 K_k，使得估计误差

$$e_k = z_k - \hat{z}_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{8}$$

的方差对于所有的可容许参数不确定，都小于它的一个上界，且使得该上界达到最小.

由(1)~(3)式及(6)~(7)式构成的闭环系统为

$$\xi_{k+1} = (A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})\xi_k + B_{c,k}w_k, \quad \xi_0 = \bar{\xi}_0, \tag{9}$$

$$e_k = L_{c,k}\xi_k, \tag{10}$$

这里

$$\xi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}, \quad \bar{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{c,k} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ K_kC_k & A_{e,k} - K_kC_k \end{bmatrix},$$

$$B_{c,k} = \begin{bmatrix} B_k \\ K_kD_k \end{bmatrix}, \quad H_{c,k} = \begin{bmatrix} H_{1,k} \\ K_kH_{2,k} \end{bmatrix},$$

$$E_{c,k} = [E_k \quad 0], \quad L_{c,k} = [L_k \quad -L_k].$$

令

$$U_k = I - \varepsilon^2 E_{c,k}P_kE_{c,k}^T,$$

引入如下 Riccati 方程

$$P_{k+1} = A_{c,k}P_kA_{c,k}^T + \varepsilon^2 A_{c,k}P_kE_{c,k}^TU_k^{-1}E_{c,k}P_kA_{c,k}^T + \varepsilon^{-2}H_{c,k}H_{c,k}^T + B_{c,k}B_{c,k}^T, \quad P_0 = \bar{P}_0, \tag{11}$$

其中 $\bar{P}_0 = \mathrm{diag}\{R, 0\}$，$\mathrm{diag}\{\cdot\}$ 表示块对角矩阵，$\varepsilon > 0$ 为一个要选择的标量参数.

引理 1 考虑闭环系统(9)~(10)式，若对于某个标量 $\varepsilon > 0$，方程(11)存在一个有界时变解

$$P_k = P_k^T \geqslant 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

且

$$I - \varepsilon^2 E_{c,k}P_kE_{c,k}^T > 0 \tag{12}$$

成立，则对于所有可容许的参数不确定，都有

$$E\{\xi_k\xi_k^T\} \leqslant P_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{13}$$

证 引入

$$J_k = \varepsilon A_{c,k}P_kE_{c,k}^TU_k^{-1/2} - \varepsilon^{-1}H_{c,k}F_kU_k^{1/2},$$

显然

$$0 \leqslant J_kJ_k^T = \varepsilon^2 A_{c,k}P_kE_{c,k}^TU_k^{-1}E_{c,k}P_kA_{c,k}^T + \varepsilon^{-2}H_{c,k}F_kF_k^TH_{c,k}^T - \Pi_k, \tag{14}$$

其中

$$\Pi_k = A_{c,k}P_kE_{c,k}^TF_k^TH_{c,k}^T + H_{c,k}F_kE_{c,k}P_kA_{c,k}^T + H_{c,k}F_kE_{c,k}P_kE_{c,k}^TF_k^TH_{c,k}^T.$$

令

$$M_k = \varepsilon^2 A_{c,k}P_kE_{c,k}^TU_k^{-1}E_{c,k}P_kA_{c,k}^T + \varepsilon^{-2}H_{c,k}H_{c,k}^T - \Pi_k,$$

由(5)，(14)式可知 $M_k \geqslant 0$. 则方程(11)可化为

$$P_{k+1} = (A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})P_k(A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})^T + M_k + B_{c,k}B_{c,k}^T, \quad P_0 = \bar{P}_0. \tag{15}$$

容易看出：$\xi_k, 0 \leqslant k \leqslant N-1$ 的协方差矩阵 Q_k 满足

$$Q_{k+1} = (A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})Q_k(A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})^T + B_{c,k}B_{c,k}^T, \quad Q_0 = \mathrm{diag}\{R_0, 0\}. \tag{16}$$

令

$$X_k = P_k - Q_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

用(15)式减去(16)式可得

$$X_{k+1} = (A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})X_k(A_{c,k} + H_{c,k}F_kE_{c,k})^T + M_k, \quad X_0 = \mathrm{diag}\{R - R_0, 0\}.$$

因为 $X_0 = X_0^T \geqslant 0$，显然(13)式成立. 证毕.

由引理 1 可知：对于某个 $\varepsilon > 0$，若方程(11)式有正半定对称解，且(12)式成立，则存在一个形如(6)~(7)式的滤波器，使得估计误差的方差对所有可容许的参数不确定，都有

$$E\{e_k^Te_k\} \leqslant \mathrm{tr}\{L_{c,k}P_kL_{c,k}^T\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1, \tag{17}$$

其中 $\mathrm{tr}\{\cdot\}$ 表示迹算子.

3 最优鲁棒滤波器设计(Optimal robust filter design)

现在，我们来推导使得(17)式中估计误差方差的上界 $\mathrm{tr}\{L_{c,k}P_kL_{c,k}^T\}$ 达到最小的滤波器参数矩阵 $A_{e,k}$ 与 K_k.

令

$$\bar{B}_k = [B_k \quad \varepsilon^{-1}H_{1,k}],$$

$$\bar{D}_k = [D_k \quad \varepsilon^{-1}H_{2,k}],$$

$$N_k = \varepsilon^2 E_k^T(I - \varepsilon^2 E_kY_kE_k^T)^{-1}E_k,$$

$$W_k = N_k(I + Y_kN_k)^{-1},$$

$$S_k = Z_k + Z_kW_k^{1/2}(I - W_k^{1/2}Z_kW_k^{1/2})^{-1}W_k^{1/2}Z_k,$$

$$V_k = \bar{D}_k\bar{D}_k^T + C_kS_kC_k^T.$$

我们有如下定理

定理 1 考虑系统(1)~(3)式.存在一个形如(6)~(7)式的滤波器,使得(17)式中的估计误差方差上界达到最小;当且仅当存在一个 $\varepsilon > 0$,满足如下条件:

1) Riccati 方程

$$Y_{k+1} = A_k Y_k A_k^{\mathrm{T}} + A_k Y_k N_k Y_k A_k^{\mathrm{T}} + \bar{B}_k \bar{B}_k^{\mathrm{T}},\ Y_0 = R \tag{18}$$

有解

$$Y_k = Y_k^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

且满足

$$I - \varepsilon^2 E_k Y_k E_k^{\mathrm{T}} > 0,\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{19}$$

2) Riccati 方程

$$Z_{k+1} = A_k S_k A_k^{\mathrm{T}} - (A_k S_k C_k^{\mathrm{T}} + \bar{B}_k \bar{D}_k^{\mathrm{T}}) V_k^{-1} (C_k S_k A_k^{\mathrm{T}} + \bar{D}_k \bar{B}_k^{\mathrm{T}}) + \bar{B}_k \bar{B}_k^{\mathrm{T}},\quad Z_0 = R \tag{20}$$

有解

$$Z_k = Z_k^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

且满足

$$I - W_k^{1/2} Z_k W_k^{1/2} > 0,\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{21}$$

3) 滤波器参数矩阵为

$$K_k = (A_k S_k C_k^{\mathrm{T}} + \bar{B}_k \bar{D}_k^{\mathrm{T}}) V_k^{-1}, \tag{22}$$

$$A_{e,k} = A_k + (A_k - K_k C_k) Z_k W_k^{1/2} (I - W_k^{1/2} Z_k W_k^{1/2})^{-1} W_k^{1/2}. \tag{23}$$

此时,对于所有可容许的参数不确定都有

$$E\{e_k^{\mathrm{T}} e_k\} \leqslant \mathrm{tr}\{L_k Z_k L_k^{\mathrm{T}}\},\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{24}$$

证 见附录.

可以看出:当系统(1)~(3)中的 $B_k D_k^{\mathrm{T}} = 0$, $D_k D_k^{\mathrm{T}} = I$,且系统不含参数不确定时(也即 $H_{1,k} = 0, H_{2,k} = 0$ 及 $E_k = 0$),则定理1中的滤波器与标准离散 Kalman 滤波器是一样的.

现在,我们研究一下定理1中鲁棒滤波器的渐近特性.假定系统(1)~(3)中的标称系统矩阵以及矩阵 H_1, H_2 与 E 均为常值矩阵,且 $DD^{\mathrm{T}} > 0$.同时,我们还假定滤波器参数矩阵 A_e 与 K 也是时不变的.

首先,考虑如下代数 Riccati 方程

$$A_c P A_c^{\mathrm{T}} - P + \varepsilon^2 A_c P E_c^{\mathrm{T}} (I - \varepsilon^2 E_c P E_c^{\mathrm{T}})^{-1} E_c P A_c^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-2} H_c H_c^{\mathrm{T}} + B_c B_c^{\mathrm{T}} = 0. \tag{25}$$

由文[6]的引理1可知下列两个条件是等价的:

C1) (25)式存在一个稳定解 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$(也即 $A_c + \varepsilon^2 A_c P E_c^{\mathrm{T}} (I - \varepsilon^2 E_c P E_c^{\mathrm{T}})^{-1} E_c$ 的所有特征根都在单位圆内),且满足

$$I - \varepsilon^2 E_c P E_c^{\mathrm{T}} > 0. \tag{26}$$

C2) A_c 是渐近稳定的,且

$$\| [B_c \quad \varepsilon^{-1} H_c]^{\mathrm{T}} (zI - A_c^{\mathrm{T}})^{-1} (\varepsilon E_c)^{\mathrm{T}} \|_\infty < 1. \tag{27}$$

由文[7]的定理1.7可知条件C2)等价于闭环系统二次稳定.这样引理1可化为如下引理

引理 2 考虑闭环系统(9)~(10)式,则对于某个标量 $\varepsilon > 0$,方程(25)存在一个稳定解 $P = P^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,且(26)式成立;当且仅当闭环系统是二次稳定的.此时,对于所有可容许的参数不确定,估计误差的渐近方差都满足

$$\lim_{k \to \infty} E\{e_k^{\mathrm{T}} e_k\} \leqslant \mathrm{tr}\{L_c P L_c^{\mathrm{T}}\}. \tag{28}$$

该引理的证明很容易从引理1的极限情形得出.显然 A_c 渐近稳定等价于 A 与 $A_e - KC$ 均渐近稳定,而(27)式又等价于

$$\| [B \quad 0 \quad \varepsilon^{-1} H_1]^{\mathrm{T}} (zI - A^{\mathrm{T}})^{-1} (\varepsilon E)^{\mathrm{T}} \|_\infty < 1. \tag{29}$$

由文[6]的引理1可知,A 渐近稳定且(29)式成立等价于 Riccati 方程

$$AYA^{\mathrm{T}} - Y + AYNYA^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{30}$$

存在一个稳定解 $Y = Y^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,且

$$I - \varepsilon^2 EYE^{\mathrm{T}} > 0. \tag{31}$$

考虑 Riccati 方程

$$ASA^{\mathrm{T}} - Z - (ASC^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{D}^{\mathrm{T}}) V^{-1} (CSA^{\mathrm{T}} + \bar{D}\bar{B}^{\mathrm{T}}) + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{32}$$

与文[8]中定理3.1的证明相似,可以看出方程(32)式等价于方程

$$AZA^{\mathrm{T}} - Z - (AZC_1^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{D}_1^{\mathrm{T}})(R_1 + C_1 Z C_1^{\mathrm{T}})^{-1} (C_1 Z A^{\mathrm{T}} + \bar{D}_1 \bar{B}^{\mathrm{T}}) + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} = 0. \tag{33}$$

其中

$$C_1 = \begin{bmatrix} C \\ W^{1/2} \end{bmatrix},\ \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} \bar{D} \\ 0 \end{bmatrix},\ R_1 = \begin{bmatrix} \bar{D}\bar{D}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

若(33)式存在一个稳定解 $Z = Z^{\mathrm{T}} \geqslant 0$,且

$$I - W^{1/2} Z W^{1/2} > 0 \tag{34}$$

成立,取

$$K = (ASC^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{D}^{\mathrm{T}}) V^{-1}, \tag{35}$$

$$A_e = A + (A - KC) Z W^{1/2} (I - W^{1/2} Z W^{1/2})^{-1} W^{1/2}. \tag{36}$$

则

$$A - (AZC_1^{\mathrm{T}} + \bar{B}\bar{D}_1^{\mathrm{T}})(R_1 + C_1 Z C_1^{\mathrm{T}})^{-1} C_1 = A_e - KC$$

是渐近稳定的.显然滤波器(6)~(7)是渐近稳定的.通过以上分析,再由定理1,可得如下定理

定理 2 假定系统(1)是二次稳定的.存在一个形如(6)~(7)的时不变稳定滤波器,使得(28)式中

估计误差的渐近方差上界达到最小;当且仅当存在一个 $\varepsilon>0$,满足下列条件:

1) 方程(30)式存在一个稳定解 $Y=Y^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,且满足(31)式;

2) 方程(32)式存在一个稳定解 $Z=Z^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,且满足(34)式;

3) 滤波器参数矩阵 A_e 与 K 分别由(36)与(35)式给出.

此时对于所有可容许的参数不确定,估计误差的渐近方差都满足

$$\lim_{k\to\infty}E\{e_k^{\mathrm{T}}e_k\}\leqslant \mathrm{tr}\{LZL^{\mathrm{T}}\}. \tag{37}$$

该定理的证明很容易从以上分析及定理 1 的证明中得出.由文[6]的引理 3 可知,若(30)式对于某个 $\varepsilon=\bar{\varepsilon}>0$ 有正半定稳定解,则对于 $\forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$,(30)式也都有正半定稳定解.因此,存在一个最优的 $\varepsilon^*>0$,使得(30)式对于 $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ 都有正半定稳定解.

4　数值例子(A numerical example)

我们考虑与文[4]相同的数值例子,以便进行比较.考虑如下不确定系统

$$x_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & -0.5\\ 1 & 1+\delta_k\end{bmatrix}x_k+\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}w_k,\ |\delta_k|\leqslant 0.3,$$

$$y_k=[-100\quad 10]x_k+[0\quad 1]w_k,$$

$$z_k=[1\quad 0]x_k.$$

取

$$H_1=[0\quad 10]^{\mathrm{T}},\quad H_2=0,\quad E=[0\quad 0.03].$$

考虑无限时域情形,根据定理 2,可以得到使得(30)式存在稳定解的 ε 的最优值很接近 1.17.不同 ε 所对应的估计误差方差上界如表 1 所示.可以看出:当 $\varepsilon=1.17$ 时估计误差方差上界最小,它为 69.3,且相应的稳定鲁棒滤波器为

$$\hat{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & -0.5821\\ 1 & 1.1807\end{bmatrix}\hat{x}_k+\begin{bmatrix}-0.0068\\ 0.0050\end{bmatrix}(y_k-[-100\quad 10]\hat{x}_k).$$

将上述滤波器与标准 Kalman 滤波器,以及文[4]中具有估计误差方差上界为 98.7 的鲁棒 Kalman 滤波器作一比较,三种滤波器对于固定 δ 的实际估计误差方差如表 2 所示.

表 1　不同 ε 所对应的估计误差方差上界

Table 1　The upper bound for the variance of estimation error versus ε

ε	0.1	0.5	0.8	1.0	1.15	1.17
估计误差方差上界	1793	135.3	87.7	75.5	69.9	69.3

表 2　三种滤波器实际估计误差方差的比较

Table 2　Comparison among the actual variance of estimation error achieved with the three filters

滤波器	$\delta=-0.3$	$\delta=0$	$\delta=0.3$
标准 Kalman 滤波器	551.2	36.0	8352.8
文[4]的鲁棒滤波器	64.0	61.4	64.4
本文的鲁棒滤波器	51.3	49.7	52.7

由表 2 可以看出:当系统存在参数不确定时,本文所提供的鲁棒滤波器明显优于标准 Kalman 滤波器以及文[4]中的鲁棒 Kalman 滤波器.

5　结论(Conclusion)

本文研究了一类在状态和输出矩阵中含有范数有界参数不确定的离散线性系统的鲁棒滤波问题.得到了系统估计误差方差的一个上界,并导出了使得该上界达到最小的有限时间鲁棒滤波器形式及其存在的充要条件.同时,我们也分析了无限时间情形的鲁棒滤波问题,并给出了稳定鲁棒滤波器形式及其存在的充要条件.数值结果表明:当系统存在参数不确定时,本文所提供的鲁棒滤波器明显优于标准 Kalman 滤波器以及文[4]中的鲁棒 Kalman 滤波器.

参考文献(References)

1　Petersen I R and McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(9): 1971 – 1977

2　Bolzern P, Colaneri P and De Nicolao G. Optimal robust filtering with time-varying parameter uncertainty. Int. J. Control, 1996, 63(3): 557 – 576

3　Shaked U and De Souza C E. Robust minimum variance filtering. IEEE Trans. Signal Processing, 1995, 43(11): 2474 – 2483

4　Xie L, Soh Y C and De Souza C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(6): 1310

-1314

5 Theodor Y and Shaked U. Robust discrete-time minimum-variance filtering. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(2): 181-189

6 De Souza C E and Xie L. Robust H_∞ filtering. In: Leondes C.T., eds. Control and dynamic systems. San Diego: Academic Press, 1994, 65(2): 323-377

7 Packard A and Doyle J C. Quadratic stability with real and complex perturbations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, 35(2): 198-201

8 De Souza C E and Xie L. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers. Syst. Contr. Lett. 1992, 18(1): 61-71

附 录(Appendix)

定理 1 的证明:

必要性 取 $\tilde{P}_k = [I \quad -I]P_k[I \quad -I]^{\mathrm{T}}, 0 \leqslant k \leqslant N-1$. 由(17)式可知:估计误差 e_k 方差的上界最小化等价于 $\tilde{P}_k$ 的最小化. 将(11)式中的 P_k 分块为 $P_k = \begin{bmatrix} P_{11,k} & P_{12,k} \\ P_{12,k}^{\mathrm{T}} & P_{22,k} \end{bmatrix}$, 其中所有子块矩阵均为 $n \times n$ 的. 假定在 k 时刻有 $P_{12,k} = P_{12,k}^{\mathrm{T}} = P_{22,k}$, 这意味着当(17)式中等号成立时, $x_k - \hat{x}_k$ 与 $\hat{x}_k$ 不相关. 定义 $Y_k = P_{11,k}$, $Z_k = \tilde{P}_k = P_{11,k} - P_{22,k}$, 对于 $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, 令 $v^{\mathrm{T}} = [v_1^{\mathrm{T}} \quad v_2^{\mathrm{T}}]$, 由于 $v^{\mathrm{T}}P_kv \geqslant 0$, 取 $v_2 = 0$, 可得 $Y_k \geqslant 0$; 取 $v_1 = 0$, 可得 $P_{22,k} \geqslant 0$; 取 $v_2 = -v_1$, 可得 $Z_k \geqslant 0$. 显然由(12)式可得(19)式. 将(11)式分解可得(18)式以及

$$\begin{aligned} P_{12,k+1} = {} & A_kY_k(I + N_kP_{22,k})A_{e,k}^{\mathrm{T}} + A_k(I + Y_kN_k)Z_kC_k^{\mathrm{T}}K_k^{\mathrm{T}} + \\ & \bar{B}_k\bar{D}_k^{\mathrm{T}}K_k^{\mathrm{T}}, \quad P_{12,0} = 0, \end{aligned} \tag{A1}$$

$$\begin{aligned} P_{22,k+1} = {} & A_{e,k}(P_{22,k} + P_{22,k}N_kP_{22,k})A_{e,k}^{\mathrm{T}} + \\ & A_{e,k}P_{22,k}N_kZ_kC_k^{\mathrm{T}}K_k^{\mathrm{T}} + K_kC_kZ_kN_kP_{22,k}A_{e,k}^{\mathrm{T}} + \\ & K_k\Lambda_kK_k^{\mathrm{T}}, \quad P_{22,0} = 0, \end{aligned} \tag{A2}$$

其中

$$\Lambda_k = \bar{D}_k\bar{D}_k^{\mathrm{T}} + C_k(I + Z_KN_k)Z_kC_k^{\mathrm{T}}.$$

又因为

$$\tilde{P}_{k+1} = Y_{k+1} - P_{12,k+1} - P_{12,k+1}^{\mathrm{T}} + P_{22,k+1},$$

将(18),(A1)和(A2)式代入,且对 K_k 进行配方可知,当

$$K_k = [A_k(I + Y_kN_k)Z_kC_k^{\mathrm{T}} + \bar{B}_k\bar{D}_k^{\mathrm{T}} - A_{e,k}P_{22,k}N_kZ_kC_k^{\mathrm{T}}]\Lambda_k^{-1} \tag{A3}$$

时, $\tilde{P}_{k+1}$ 达到最小,为了在 $k+1$ 时刻使得 $P_{12,k+1} = P_{22,k+1}$ 成立,我们需要选择 $A_{e,k}$, 用(A2)式减去(A1)式,并考虑(A3)式,可得

$$\begin{aligned} P_{22,k+1} - P_{12,k+1} = {} & [A_{e,k}(I + P_{22,k}N_k) + K_kC_kZ_kN_k - \\ & A_k(I + Y_kN_k)]P_{22,k}A_{e,k}^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

为了使上式恒等于零,应取

$$\begin{aligned} A_{e,k} = {} & [A_k(I + Y_kN_k) - K_kC_kZ_kN_k](I + P_{22,k}N_k)^{-1} = \\ & A_k + (A_k - K_kC_k)Z_kN_k(I + P_{22,k}N_k)^{-1}. \end{aligned} \tag{A4}$$

由于 $I + P_{22,k}N_k$ 的特征值与 $I + N_k^{1/2}P_{22,k}N_k^{1/2}$ 的特征值相同,所以 $I + P_{22,k}N_k > 0$. 同理 $I + Y_kN_k > 0$, 因而 $I - Z_kW_k > 0$. 可以证明 W_k 是正半定对称矩阵,且

$$N_k(I + P_{22,k}N_k)^{-1} = W_k^{1/2}(I - W_k^{1/2}Z_kW_k^{1/2})^{-1}W_k^{1/2}. \tag{A5}$$

由于 $I - Z_kW_k$ 的特征值与 $I - W_k^{1/2}Z_kW_k^{1/2}$ 的特征值相同,所以(21)式成立. 由(A4)及(A5)式可得(23)式. 将(A4)式代入(A3)式,整理可得(22)式. 因为 $P_{12,0} = P_{12,0}^{\mathrm{T}} = P_{22,0}$, 且(A3),(A4)式成立,所以有

$$\tilde{P}_{k+1} = Y_{k+1} - P_{22,k+1} = Z_{k+1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

将(18)式减去(A2)式,并考虑(22),(23)式,整理可得(20)式. 必要性得证.

充分性 假定定理 1 中的条件 1)~3)成立,则容易看出矩阵 $P_k = \begin{bmatrix} Y_k & Y_k - Z_k \\ Y_k - Z_k, & Y_k - Z_k \end{bmatrix}$ 满足(11)式,且(12)式成立. 同时容易验证具有参数矩阵(22),(23)式的滤波器使得估计误差 e_k 方差的上界 $\mathrm{tr}\{L_{c,k}P_kL_{c,k}^{\mathrm{T}}\}$ 达到最小,且其最小值为 $\mathrm{tr}\{L_kZ_kL_k^{\mathrm{T}}\}$. 证毕.

本文作者简介

吴淮宁 1972 年生. 1992 年于山东建材学院自动化系获学士学位, 1997 年获西安交通大学自动控制理论及应用专业博士学位, 现为北京理工大学电子工程系博士后. 研究方向为鲁棒控制与估计, H_∞ 控制与估计, 自适应波束形成.

费元春 女, 1938 年生. 1960 年毕业于北京工业学院. 现为北京理工大学电子工程系教授, 博士生导师. 研究领域为微波与雷达技术, 微波电路和系统, 频率合成理论和技术以及低噪声接收技术. 曾获得国家发明奖三项及部级科技进步奖多项.