判定矩阵稳定、正定以及为 *M* 矩阵的统一简化条件 *

廖晓昕
(华中理工大学自控系·武汉, 430074)
胥布工
(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510640)

摘要: 本文给出了一个判定矩阵稳定、正定以及为 *M* 矩阵的统一简化条件. 基于该条件提出的判定方法简化了计算, 因而应用十分方便. 文中给出三个示例说明了方法的应用.

关键词: 稳定性; 稳定矩阵; 正定阵; *M* 矩阵; 简化判定条件

A Unified Simple Condition for Stable Matrix, Positive-Definite Matrix and *M*-Matrix

Liao Xiaoxin
(Department of Automatic Control Engineering, Huazhong University of Science and Technology · Wuhan, 430074, P.R.China)
Xu Bugong
(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P.R.China)

Abstract: A unified simple condition for stable matrix, positive-definite matrix and *M*-matrix is presented in this paper. Based on the established conditon, a simplified method which is easy to use for judging those matrices is proposed. Three illustrative examples are given to show the applications of the proposed method.

Key words: stability; stable matrix; positive-definite matrix; *M*-matrix; simplified criterion

1 引言(Introduction)

众所周知, 在控制系统稳定性分析中, 二次型正定、负定、半正定、半负定、矩阵稳定以及为 *M* 矩阵的判定是应用最频繁的[1~4]. 但对于一般的 n 维系统, 要验证 n 个行列式的符号是非常麻烦的. 特别对于大维数系统, 计算量随着 n 的增大将急剧增加. 如设

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j := x^{\mathrm{T}}Ax \tag{1}$$

为实系数二次型, 其中 $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. 一般[5], 若 $f(x)$ 正定(负定)或半正定(半负定), 则简称为 A 正定(负定)或 A 半正定(半负定), 并记为 $A > 0$($A < 0$) 或 $A \geqslant 0$($A \leqslant 0$).

若 $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 由著名的 Sylvester 条件知, A 正定的充要条件为:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

A 负定的充要条件为:

$$\Delta_1 = -a_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

A 半正定的充要条件为:

$$\Delta_1 = a_{11} \geqslant 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0;$$

而 A 半负定的充要条件为:

$$\Delta_1 = -a_{11} \geqslant 0,$$

$$\Delta_2 = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

均要同时验证 n 个行列式的符号.

* 国家自然科学基金项目(69674008 和 69674026)资助课题.
本文于 1998 年 1 月 20 日收到.

若 $A \in \mathbb{R}^n$,且 $a_{ii} > 0$ 和 $a_{ij} \leqslant 0, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$,则 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为一个 M 矩阵的充要条件是[1,2]:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

也要同时验证 n 个行列式的符号.

记

$$f(\lambda) = \det|\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

其中,$a_i > 0, i = 0,1,\cdots,n$.若 $f(\lambda) = 0$ 仅有负实部根,称其为 Hurwitz 多项式,称相应的 A 为 Hurwitz 矩阵.由著名的 Hurwitz 定理知,A 为 Hurwitz 矩阵的充要条件为:

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1} > 0,$$

其中当 $i > n$ 时,取 $a_i = 0$.同样要同时验证 n 个行列式的符号.

对于大维数控制系统,稳定性判定中简化计算的一种处理方法是通过对系统的分解和降阶来实现的[2~4],但这种方法难免引入不必要的保守性.本文给出一种非降阶的直接简化判定形式,使得只需验证一个行列式的符号,就可得出结果,从而大大简化了计算、更方便应用.同时,也避免了在结果中引入不必要的保守性.

2 简化的等价形式(Simplified equivalent condition)

我们知道,若按行列式的原始定义,通过展开来计算或判定其符号,将是十分冗繁的.但若利用行列式的性质,通过保值保号变换将其化成三角形行列式,则后者的符号从主对角线元素的符号一望而知.

定义 行列式的某行(列)乘以一个正数,或某行(列)乘以某数加上另一行(列)的变换称为行列式的保号变换.

显然,我们总可以通过行列式的保号变换将一个行列式三角化,如:

$$|A|: = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} : = |B|,$$

其中 Ψ 代表一系列行列式的保号变换.于是有:

命题 设 $A \in \mathbb{R}^n$.把 $|A|$ 通过保号变换化为 $|B|$,我们有:

1) 当 $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,则 A 正定(半正定)当且仅当 $b_{ii} > 0 (b_{ii} \geqslant 0), i = 1,2,\cdots,n$;$A$ 负定(半负定)当且仅当 $b_{ii} < 0 (b_{ii} \leqslant 0), i = 1,2,\cdots,n$;$A$ 不定当且仅当 b_{ii} 中有正有负,$i = 1,2,\cdots,n$.

2) 当 $a_{ii} > 0$ 和 $a_{ij} \leqslant 0, i,j = 1,2,\cdots,n$,则 A 为 M 矩阵当且仅当 $b_{ii} > 0, i = 1,2,\cdots,n$.

3) 当 $a_i > 0, i = 0,1,\cdots,n$,则 $f(\lambda) = \det|\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ 为 Hurwitz 多项式当且仅当

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{ii} > 0, i = 1,2,\cdots,n-1$.

证 我们仅证 $A = A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,$A$ 正定的情况,其他都是类似的,故略.

因为:A 正定 $\Leftrightarrow$

$$\Delta_1 = a_{11} > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

由

$$a_{11} > 0 \Rightarrow b_{11} > 0,$$

而由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

故由 $b_{11}>0$ 和 $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}>0$ 可推出：$b_{22}>0$. 如此类推，可推出：$b_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$.

反之，由 $b_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$，可推知：

$$\tilde{\Delta}_1=b_{11}>0,\quad \tilde{\Delta}_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,$$

$$\tilde{\Delta}_n=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

从而可推出：

$$\Delta_1=a_{11}>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

故结论成立.　　证毕.

注 1　我们这种方法实际上只计算了最后一个行列式的符号，前面的 $n-1$ 个行列式的符号在计算最后一个行列式的符号时顺便地、附带地计算出来. 可见它们与最后一个行列式不是完全独立的. 而且有时不一定完全三角化，很快就知道 A 的不定、非正定性. 例如，通过两步保号变换得：

$$|A|:=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\Psi}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

若 $b_{11}b_{22}<0$，则 A 变号；若 $b_{11}b_{22}=0$，则 A 至少非正定或非负定，因此该方法是很实用的.

注 2　如果化 $|A|$ 为上三角形行列式 $|B|$ 不方便，而化为下三角形行列式方便时，则可化为下三角形行列式 $|B|$，即：

$$|A|:=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\Psi}$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}:=|B|,$$

所得结论与前面相同.

以下约定，kr_i, kc_i 分别表用 $k>0$ 乘以第 i 行、第 i 列，r_i+lr_j, c_i+lc_j 分别表用 $l\neq 0$ 乘以第 j 行(列)加到第 i 行(列).

3　应用示例(Illustrative examples)

例 1　考虑具有时滞的 Hopfield 神经网络系统[6]：

$$C_i\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{4}T_{ij}g_j(u_j(t-\tau))+I_i,$$
$$i=1,2,3,4, \tag{2}$$

其中

$g_j(u_j)u_j>0$,

$u_j\neq 0,\quad 0<g_j\leqslant 1$,

$g_j(\pm\infty)=\pm 1,\quad C_i=1,\quad i=1,2,3,4$,

$R_1=R_3=\dfrac{1}{5}$,

$R_2=\dfrac{1}{4}$,

$R_4=\dfrac{1}{6}$,

$$(T_{ij})_{4\times 4}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

I_i 为任意的输入电流.

文[6]已证明：若

$$A:=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2},\frac{1}{R_3},\frac{1}{R_4}\right)-(|T_{ij}|)_{4\times 4}$$

为 M 矩阵，则系统(2)的平衡位置存在唯一，且为全局指数稳定. 因此，我们只需验证

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

为 M 矩阵.

我们有：

$$
|A|:=\begin{vmatrix}4&-1&-2&-3\\-1&3&-2&-1\\-\frac{1}{2}&-1&4&0\\0&-1&-1&5\end{vmatrix}\xrightarrow[4r_2+r_1]{2r_3-r_2}
\begin{vmatrix}4&*&*&*\\0&11&-10&-7\\0&-5&10&1\\0&-1&-1&5\end{vmatrix}\xrightarrow[11r_4+r_2]{r_3-5r_4}
$$

$$
\begin{vmatrix}4&*&*&*\\0&11&*&*\\0&0&15&-24\\0&0&-21&48\end{vmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{24}c_4,\frac{1}{3}c_3}
\begin{vmatrix}4&*&*&*\\0&11&*&*\\0&0&5&-1\\0&0&-7&2\end{vmatrix}\xrightarrow{c_3+\frac{7}{2}c_4}
\begin{vmatrix}4&*&*&*\\0&11&*&*\\0&0&\frac{3}{2}&*\\0&0&0&2\end{vmatrix}:=|B|.
$$

显然 $|B|$ 的主对角元素全为正，故 A 为 M 矩阵. 因此，系统(2)的平衡位置存在唯一，且全局指数稳定. 这在设计人工神经网络中是很实用的简洁判据.

注 3 例 1 推导中打 $*$ 号的元素表示对下一步的计算已没有任何作用了，因此没有必要写出来. 因为，当 $a_{ij}, i\neq j$，全化为 0 时，a_{ji} 的作用也完成了，可以弃之.

例 2 考虑一个具有如下传递函数

$$
G(s)=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\times\frac{N_2(s)}{D_2(s)} \tag{3}
$$

的开环控制系统的稳定性，
其中

$$
\begin{aligned}
f(s)&=D_1(s)D_2(s)=\\
&s^4+3s^3+5s^2+4s+2\triangleq\\
&a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4.
\end{aligned}
$$

显然 $a_i>0, i=0,1,2,3,4$. 根据 Hurwitz 定理及我们给出的简化条件，我们只须处理以下的三阶行列式：

$$
|A|:=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0\\a_3&a_2&a_1\\0&a_4&a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&0\\4&5&3\\0&2&4\end{vmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{3}{4}r_3}
\begin{vmatrix}3&1&0\\4&\frac{7}{2}&0\\0&2&4\end{vmatrix}\xrightarrow{r_1-\frac{2}{7}r_2}
\begin{vmatrix}\frac{13}{7}&0&0\\4&\frac{7}{2}&0\\0&2&4\end{vmatrix}:=|B|,
$$

$|B|$ 的主对角线元素全为正数，故开环系统(3)是稳定的.

例 3 用简化方法证明二次型

$$
f(x)=x^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{cccc|cc}
 & & & &1&-1\\
 &A(a_{ij})_{4\times4}& & &-1&1\\
 & & & &-1&1\\
 & & & &1&-1\\\hline
1&-1&-1&1&1&2\\
-1&1&1&-1&2&2
\end{array}\right]x
$$

是变号函数，其中 $A(a_{ij})_{4\times4}$ 为任意的 4×4 维实对称阵，$x=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^{\mathrm{T}}$.

证

$$
\left|\begin{array}{cccc|cc}
 & & & &1&-1\\
 &A(a_{ij})_{4\times4}& & &-1&1\\
 & & & &-1&1\\
 & & & &1&-1\\\hline
1&-1&-1&1&1&2\\
-1&1&1&-1&2&2
\end{array}\right|\xrightarrow{c_6+c_5}
\left|\begin{array}{cccc|cc}
 & & & &1&0\\
 &A(a_{ij})_{4\times4}& & &-1&0\\
 & & & &-1&0\\
 & & & &1&0\\\hline
1&-1&-1&1&1&3\\
-1&1&1&-1&2&4
\end{array}\right|\xrightarrow{r_6-r_5}
$$

$$
\left|\begin{array}{cccc|cc}
 & & & &1&0\\
 &A(a_{ij})_{4\times4}& & &-1&0\\
 & & & &-1&0\\
 & & & &1&0\\\hline
1&-1&-1&1&1&3\\
-2&2&2&-2&1&1
\end{array}\right|\xrightarrow{r_5-3r_6}
$$

$$\left|\begin{array}{c:cc} A(a_{ij})_{4\times 4} & \begin{matrix}1&0\\-1&0\\-1&0\\1&0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} * & * & * & *\\ * & * & * & *\end{matrix} & \begin{matrix}-2&0\\1&1\end{matrix}\end{array}\right| \xrightarrow{\substack{r_3+r_4,2r_4+r_5\\ r_1+r_2,r_2+r_4}}$$

$$\left|\begin{array}{c:cc} \tilde{A}(a_{ij})_{4\times 4} & \begin{matrix}0&0\\0&0\\0&0\\0&0\end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} * & * & * & *\\ * & * & * & *\end{matrix} & \begin{matrix}-2&0\\1&1\end{matrix}\end{array}\right| := |B|,$$

其中 $*$ 号和 $\tilde{A}(a_{ij})_{4\times 4}$ 表示无必要具体写出来的.因为 $b_{55}=-2, b_{66}=-1$,根据所给简化条件知 $f(x)$ 是变号函数.　　证毕.

参考文献(References)

1 Liao Xiaoxin. Absolute stability of nonlinear control systems. Beijing: Science Press, 1993, London: Kluwer Academic Publisher, 1993

2 Xu Bugong. On delay-independent stability of large-scale systems with time delays. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, 40(5): 930 – 933

3 Michel A N and Miller R K. Qualitative analysis of large scale dynamical systems. New York: Academic Press, 1977

4 Siljak D D. Large-scale Dynamic systems: stability and structure. New York: North-Holland, 1978

5 北京大学编.高等代数.北京:高等教育出版社,1978

6 Liao Xiaoxin and Liao Yang. Stability of Hopfield type neural network (Ⅱ). Science in China, Series A, 1997, 40(8): 813 – 816

本文作者简介

廖晓昕　1938年生.1963年毕业于武汉大学数学系.1978年至1986年先后在华中师范大学数学系任讲师、副教授、教授、硕士生导师,并先后获国家级有突出贡献的中青年专家及全国优秀教师称号.1995年至今在华中理工大学数学系、自控系任教授、博士生导师.著有英文专著《非线性控制系统的绝对稳定性》和中文专著《稳定性的数学理论和应用》,在国内外重要刊物上发表论文100余篇及两项一人独得国家教委科技进步二等奖.目前主要研究方向是非线性控制及神经网络的数学理论.

胥布工　1956年生.1972年~1978年在某大型石化企业工作.1978~1982年在华南工学院自动化系化工自动化及仪表专业学习,获工学学士学位.1982年至今先后任助教、讲师、副教授、教授,现为华南理工大学自动控制工程系系主任.其间,于1989年和1993年分别获工学硕士和工学博士学位.1993年~1995年在英国Strathclyde大学电子与电机工程系作访问研究.目前主要研究方向为时滞系统,不确定系统以及大系统的分析与综合.