

# Fork-Join 排队网络建模与分析的研究进展\*

徐学雷 郑大钟  
(清华大学自动化系·北京,100084)

**摘要:** 本文综述了近年来对一类特殊的离散事件动态系统——Fork-Join 排队网络的研究进展. 全文主要包括三部分: 首先给出 Fork-Join 网络产生的实际背景及其精确的数学描述; 其次, 介绍已取得的主要结果及其所采用的方法; 最后提出一些值得研究的问题.  
**关键词:** Fork-Join 排队网络; 建模与分析; 同步性; 稳态分布; 响应时间; 随机序

## 1 引言

在计算机通讯和柔性制造系统(FMS)中, 常会碰到称之为 Fork-Join 排队网络的一类离散事件动态系统(DEDS)<sup>[1]</sup>. 这类网络的特点是: 一个信息或工件一进入系统就立刻分解成多个信息或零件, 以在不同的计算机上进行处理或在不同的机床上加工, 而分解后的信息或零件可在一批串联的机器上依次接受服务, 也可继续分解为子信息或子零件以在并联的机器上分别接受服务, 如此继续下去……, 最后将处理完的信息或零件再组合成一个新的信息或零件, 离开系统. 因此, 该系统包含了顾客的到达、分解、接受服务、重新组合、离开系统等活动, 它是其到达和离开均具有同步性的一类特殊 DEDS. 研究这类系统, 可对通讯系统、计算机集成制造系统(CIMS)和 FMS 的分析、设计与优化提供理论和方法上的支持.

在这种系统中, 称分解信息的点为 Fork 点; 称组合信息的点为 Join 点. 称相应的网络为 Fork-Join 网络. 图 1 是该类网络的一个例子.

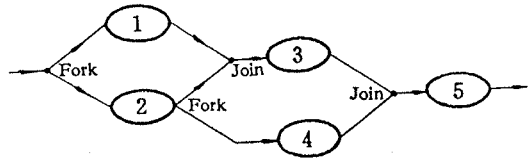


图 1 一般 Fork-Join 网络

对于一般的 Fork-Join 排队网络, 若以信息处理机为节点, 以机器之间的优先关系为有向边, 则可用一非周期有向图  $A=(V, E)$  来描述, 其中  $V$  是标有标号  $i=1, 2, \dots, N$  的  $N$  个先来先服务的队列集,  $E \subset E'$  为链路集, 其中  $E' = \{(i, j) : i, j \in V, j > i\}$ .

称  $P(i) = \{j \in V : (j, i) \in E\}$  为队列  $i$  的紧邻前趋集; 称  $S(i) = \{j \in V : (j, i) \in E\}$  为队列  $i$  的紧邻后继集; 令  $S(0)$  为没有输入链路的队列集,  $P(N+1)$  为没有输出链路的队列集, 则存在  $N_0, N_1$ , 使得  $1 \leq N_0 \leq N_1 \leq N$ , 且  $S(0) = (1, 2, \dots, N_0)$ ,  $P(N+1) = (N_1, \dots, N)$ .

设进入队列  $j$  的第  $n$  个顾客的到达时刻为  $a_n^j$ , 服务时间为  $\sigma_n^j$ , 则它们可完全确定队列  $j$  中第  $n$  个顾客完成服务的时间.

\* 国家自然科学基金和863自动化领域 CIMS 主题资助课题.  
本文于1992年1月13日收到. 1992年6月15日收到修改稿.

定义<sup>[2]</sup> 若非周期有向图  $A$  满足条件:

- 1) 有一模式为  $a_0=0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$  的简单外部到达流 ( $a_n \in R^+$ ), 队列  $i$  ( $1 \leq i \leq N_0$ ) 的第  $n$  个顾客到达时刻为  $a_i^n = a_n$ ;
- 2) 队列  $j$  ( $N_0 < j \leq N$ ) 中第  $n$  个顾客的到达时刻  $a_j^n$  等于其紧邻前趋集  $P(j)$  队列中第  $n$  个顾客完成服务时刻的最晚者;
- 3) 有一简单输出流, 其第  $n$  个顾客的服务时刻就是  $P(N+1)$  的队列中第  $n$  个顾客完成服务时刻的最晚者.

则称  $A$  为一非周期 Fork-Join 排队网络 (AFJQN).

由定义可知: 在 AFJQN 中, 其顾客到达系统后, 立刻分解成子顾客, 分别同时输送给  $S(0)$  的队列进行服务, 只有当这些子顾客在  $P(N+1)$  的队列中全部完成服务后才又组成一个新的顾客离开系统. 因此, 可将这些子顾客看作同时抵达系统, 待组成该顾客的所有子顾客均完成服务后, 又同时离开系统, 即在该网络中其输入和输出均具有同步性. 正是由于这种同步性, 使得网络的状态之间不具有独立性, 破坏了某些网络所具备的乘积形式解<sup>[3]</sup> 及其解对参数变化的鲁棒性<sup>[4]</sup> 等良好性质, 从而使得对该类网络的分析、设计和优化变得极为困难.

对于一般的 DEDS 的研究已提出了许多方法和大量结果<sup>[5,6,7]</sup>, 但是由于 Fork-Join 网络的特殊性质, 文献对它的研究主要还集中在建模与性能分析上, 研究的方面涉及稳态分布、等待时间、响应时间和随机序的计算和估界. 其大体上可分为三个阶段: 首先研究由  $N$  个服务台并联的 Fork-Join 网络, 给出了近似解和估界, 特别地当  $N=2$  时, 得到了稳态精确解; 其次, 对串联-并联的 Fork-Join 网络导出了稳定条件及其有关估界; 再次, 对一般 AFJQN 获得了基于凸序和随机序的估界. 但这些结果均在如下假设下获得: 1) 每个队列均具有无限排队空间; 2) 以逐个输入方式输入顾客; 3) 服务规则为先到先服务 (FCFS). 下面将概要地综述主要结果及其采用的方法.

## 2 一般 AFJQN 的分析与估界

### 2.1 AFJQN 的发展方程及稳定性

对  $n \geq 0, 1 \leq i \leq N$ , 令  $\sigma_i^n$  为队列  $i$  中第  $n$  个顾客的服务时间,  $\tau_n = a_{n+1} - a_n$  为外部到达流的第  $n$  次时间间隔;  $d_i^n$  为第  $n$  次外部到达与队列  $i$  中第  $n$  个顾客开始服务时刻之间的时间迟延; 而  $R_n$  为系统的第  $n$  次响应时间, 即第  $n$  次到达与第  $n$  次离开之间的时间迟延. 则在零初始状态下, 可建立系统的发展方程<sup>[2]</sup>:

$$d_{i+1}^n = \max \left\{ \max_{i \in P(j)} (d_{i+1}^n + \sigma_{i+1}^n), d_i^n + \sigma_i^n - \tau_n \right\}, \quad n \geq 0,$$

$$d_0^n = \max_{i \in P(j)} (d_0^n + \sigma_0^n),$$

$$R_n = \max_{i \in P(N+1)} (d_i^n + \sigma_i^n), \quad n \geq 0.$$

通常在空集上的最大值取零.

该发展方程表明: 队列  $j$  中的第  $n+1$  个顾客的迟延  $d_{i+1}^n$ , 仅与该队列第  $n$  个顾客的迟延  $d_i^n$  及其紧邻前趋集  $P(j)$  的队列中第  $n+1$  个顾客的迟延  $d_{i+1}^n$  ( $i \in P(j)$ ) 有关, 而与队列  $k$  ( $k \in P(j)$ ) 的紧邻前趋集  $P(k)$  无直接关系; 第  $n$  个顾客的响应时间  $R_n$  为迟延  $d_i^n$  与服务时间  $\sigma_i^n$  ( $i \in P(N+1)$ ) 之和的最大值. 由于到达时刻与服务时间均是随机的, 因而  $d_i^n$  和  $R_n$

均是随机变量,并且这些随机变量不具备独立性,要找它们的联合分布函数简直变得不可能(特别当  $N$  较大时),故只能用近似方法求解和用随机序方法估界以及当  $N$  较小时求解析解.正是求解联合分布的困难,才使问题变得复杂.

但文献[8,9,10,11]分别在 Poisson 输入与指数服务时间以及其到达与服务时间形成平稳遍历随机过程的条件下,对并联网络、并联串联网络和一般 AFJQN 的稳定性进行了分析,获得了与一般排队网络相同的稳定条件:当到达流速率  $\lambda$  与服务速率  $\mu_j$  满足  $\lambda < \min_{1 \leq j \leq N} \mu_j$  时,网络的状态向量(每个队列的队长组成的向量)是稳定的,即队长不会随着时间的延续而无限地增长.只有在稳态时,才能研究网络的性质.

### 2.2 任意 $N$ 个服务台并联的 Fork-Join 网络

对于图 2 所示的具有任意  $N$  个服务台并联的 Fork-Join 网络,由于只有一对 Fork 与 Join 点,在某种程度上,用系统等价或近似法可求解一些指标及其分布<sup>[12,13,14]</sup>,但给出其状态的联合分布仍是困难的.在叙述结果前,先给出一个概念.

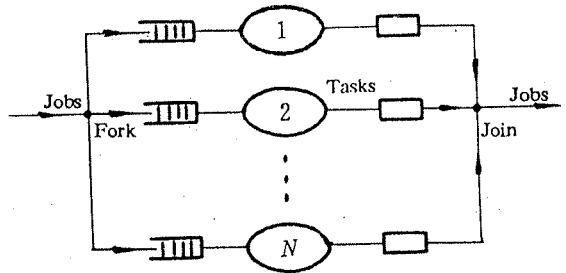


图 2 任意  $N$  个并联服务台的 Fork-Join 网络

**定义** 对第  $k$  服务台,从第  $n$  个顾客到达后的第  $t$  单位时间算起,如果不再有顾客到达,腾空该队列所需的时间称为虚拟等待时间,记为  $\tau_{n,k}(t), 1 \leq k \leq N$ .

由定义可知: $\tau_{n,k}(0)$ 就等同于第  $n$  个顾客在队列  $k$  中的等待时间与服务时间的总和,即是队列  $k$  中的第  $n$  次响应时间.

假定各服务台的服务相互独立,且每个服务台对各顾客的服务时间是独立同分布的,其分布密度函数为  $S_k(\xi)$ ;令  $\tau_{n,1}(t), \dots, \tau_{n,N}(t)$  的联合分布为  $W_n(\tau; t), \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)$ ,则  $W_n(\tau; t)$  的递推关系为<sup>[13]</sup>

$$W_{n+1}(\tau; 0) = \int_0^{\tau_N} \dots \int_0^{\tau_1} W_n(t_1, \dots, t_N; T_n) S_1(\tau_1 - t_1) \dots S_N(\tau_N - t_N) dt_1 \dots dt_N.$$

其中  $T_n$  为第  $n$  次到达时间间隔.

若在  $t_0$  时间内无顾客到达,则有关系式

$$W_n(\tau; t + t_0) = W_n(\tau + t_0; t).$$

因此,当外部到达时刻及初始分布  $W_0(\tau; T_0)$  给定时,对任意  $n$  和  $t$  均能计算  $W_n(\tau; t)$ <sup>[13]</sup>.

该网络的第  $n$  次响应时间  $R_n = \max_{1 \leq k \leq N} \tau_{n,k}(0)$ ,其分布函数可由  $W_n(\tau; t)$  表出,其期望值<sup>[15]</sup>

$$E(R_n) = \int_0^\infty (1 - W_n(\mathbf{Z}; 0)) d\mathbf{Z}.$$

其中  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$  为  $N$  维向量.

上述结果并未对外部流和服务时间分布作任何限制,但当  $N=2$ ,且服务时间分别服从指数分布和 Erlang 分布时,其联合分布  $W_n(\tau_1, \tau_2; t)$  可用级数形式表示<sup>[12]</sup>.一般说,联合分布函数  $W_n(\tau_1, \tau_2; t)$  的级数表示中,其系数有无穷多个,然而在实际中仅保留有限项就够

了,[12]还指出:当  $i$  和  $j$  足够大时,取队长分布  $p_{ij}=0$ ,即可获得平均响应时间的足够精度.

当各服务台具有相同服务率  $\mu$  时,[16]采用比例近似法得到了平均响应时间  $T_N$  的近似计算公式

$$T_N = \left[ \frac{H_N}{H_2} + \frac{4}{11} \left( 1 - \frac{H_N}{H_2} \right) \rho \right] \frac{12 - \rho}{8\mu} (1 - \rho).$$

其中  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ,且通过仿真表明:当  $N \leq 32$  时,其误差不超过 5%. 对该类系统和以此导出的 Split-Merge 系统,[17]引入了同步消耗  $S_N$  和阻塞因子  $B_N$  等指标,用分解和等价的方法分别计算出  $N=2$  的 Fork-Join 网络指标

$$S_2 = \frac{2}{3}, \quad B_2 = \frac{1 - \rho}{\rho}$$

以及  $N$  为任意的 Split-Merge 网络指标

$$S_N = \frac{N(H_N \rho - 1)}{H_N(1 - \rho)}, \quad B_N = (H_N - 1)\rho.$$

这些指标分别反映了在 Join 点同步化的顾客平均等待时间与平均响应时间的比值以及在 Join 点受阻顾客的平均数.

此外,[18]获得了  $N \geq 2$  时响应时间可计算的估界:[19,20]研究了计算机系统中存在的一类纯 Fork 网络和纯 Join 网络,仅对具有同类顾客的问题,提出了用乘积形式网络逼近其解的逐步逼近法和分解近似法,但对具有多类顾客的纯 Fork 网络和纯 Join 网络尚待进一步研究.

### 2.3 基于凸序的估界

对于一般 AFJQN,由于网络结构的复杂性,系统地分析网络的变量及其分布极为困难,因此选用某些具有良好性质的变量替代或估界网络变量,从而对网络分析起到帮助作用.[2]采用凸序和随机序<sup>[21,22]</sup>方法,对延迟  $\bar{d}_n$  和响应时间  $R_n$  进行了估界.下面将在引入两种序的基础上,介绍一些估界结果.

定义 设  $X, Y$  是定义在概率空间  $(\Omega, F, P)$  上的非负可积随机变量,若对任何非减凸函数  $f: R^+ \rightarrow R^+$ , 不等式

$$E(f(X)) \leq E(f(Y))$$

成立,则称  $X$  按凸序小于  $Y$ , 记为  $X \leq_c Y$ .

对一般 AFJQN,假定  $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\sigma_n^j\}_{n=0}^{\infty} (1 \leq j \leq N)$  均为  $(\Omega, F, P)$  上的可积随机变量,  $\bar{d}_n$  和  $R_n$  分别为与之对应的时间延迟和第  $n$  次响应时间. 现令  $G$  为  $F$  的子  $\sigma$ -代数, 取

$$\bar{\tau}_n = \bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n \geq E(\tau_n | G), \quad \bar{\sigma}_n^j \leq E(\sigma_n^j | G), \quad \text{a. s.}$$

$\bar{d}_n$  为对应的时间延迟, 则对  $\forall n \geq 0, 1 \leq j \leq N, \{\bar{d}_n^j\}$  是一族可积随机变量, 并且满足  $\bar{d}_n^j \leq E(\bar{d}_n^j | G)$ . 从而由条件概率的 Jensen 不等式<sup>[23]</sup>可得凸序关系

$$\bar{d}_n^j \leq_c \bar{d}_n^j, \quad \forall n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N.$$

从直观上可这样理解该序关系,若网络的外部到达速率小,且顾客需要的服务时间短,则顾客在网络中停留的时间就短.它与通常的想法吻合.

下面的结果是在假设

$$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\sigma_n^j\}_{n=0}^{\infty}, (1 \leq j \leq N)$$

是相互独立的条件下获得的.

现取  $j_0$  为 1 到  $N$  间的任一固定整数, 取

$$\bar{\tau}_n = E(\tau_n), \bar{\sigma}_n^j = \sigma_n^j; \bar{\tau}_n = \tau_n, \bar{\sigma}_n^j = \sigma_n^j, (j \neq j_0), \bar{\sigma}_{j_0}^j = E(\sigma_{j_0}^j).$$

令  $\bar{d}_n^j$  为对应于  $\bar{\tau}_n$  和  $\bar{\sigma}_n^j$  ( $\bar{\tau}_n$  和  $\bar{\sigma}_n^j$ ) 的系统时间迟延, 则可得凸序关系

$$\bar{d}_n^j \leq_{cl} d_n^j, \bar{d}_n^j \leq_{cl} d_n^j, \forall n \geq 0, 1 \leq j \leq N.$$

从而按不同方法可寻找到  $d_n^j$  的许多凸序下界.

[2] 还给出了由  $K$  个子 Fork-Join 网络  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  组成的并联或串联 AFJQN 的响应时间的凸序上下界. 对并联情形, 令  $R_n^l$  为  $\alpha_l$  对应于  $\{\tau_n\}$  和  $\{\sigma_n^j\}$  的第  $n$  次响应时间, 则整个并联网络的第  $n$  次响应时间  $R_n$  为

$$R_n = \max_{1 \leq l \leq K} R_n^l, \quad \forall n \geq 0,$$

$$R_n^l = \max_{j \in P_l(N+1)} (d_n^j + \sigma_n^j).$$

取  $\bar{R}_n^l$  为  $\alpha_l$  相应于  $\{\bar{\tau}_n\}$  和  $\{\sigma_n^j\}$  的第  $n$  次响应时间, 且假设存在  $K$  个相互独立同分布的随机变量序列  $\{\tilde{\tau}_n^l\}_{n=0}^{\infty}, l=1, 2, \dots, k$ , 使得

$$\tau_n = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \tilde{\tau}_n^l, \quad \forall n \geq 0,$$

则可得  $R_n$  的凸序估界

$$\max_{1 \leq l \leq K} \bar{R}_n^l \leq_{cl} R_n \leq_{cl} \max_{1 \leq l \leq K} \hat{R}_n^l.$$

其中  $\hat{R}_n^l$  为  $\alpha_l$  对应于  $\{\tilde{\tau}_n^l\}$  和  $\{\sigma_n^j\}$  的响应时间.

该结论表明: 由  $K$  个子网络并联的 AFJQN 的第  $n$  次响应时间可由各子网络的第  $n$  次响应时间的最大者来估界, 从而使原网络可化为多个容量较小的子网络来分析, 使估界计算变得较容易.

对于  $K$  个子网络串联的情形也有相似的估界.

#### 2.4 基于随机序的估界<sup>[2]</sup>

前段介绍了随机变量的凸序关系, 实质上它是建立在数学期望值的大小关系上的; 本节换一个角度, 采用建立在分布函数的大小关系上的随机序, 对网络变量进行估值.

定义 设  $F$  和  $G$  均是  $R$  上的分布函数, 如果对  $\forall x \in R$ , 有  $F(x) \leq G(x)$ , 则称  $F$  随机地控制  $G$ , 记为  $F \geq_{st} G$ .

设  $\Sigma_n^j, T_n^-$  分别为随机变量  $\sigma_n^j$  和  $-\tau_n$  的分布函数, 则其对应的支集有  $\text{supp}P(\Sigma_n^j) \subset R^+$ ,  $\text{supp}P(T_n^-) \subset R^-$ . 现由递推定义一串分布函数  $\hat{D}_n^j$ , 对  $\forall n \geq 0, 1 \leq j \leq N$  有

$$\hat{D}_0^j = \prod_{i \in P(j)} (\hat{D}_0^i * \Sigma_0^i),$$

$$\hat{D}_{n+1}^j = \left( \prod_{i \in P(j)} \hat{D}_{n+1}^i * \Sigma_{n+1}^i \right) (\hat{D}_n^j * \Sigma_n^j * T_n^-).$$

其中  $*$  表示卷积, 且当  $P(j) = \emptyset$  时, 其乘积结果为阶跃分布函数  $U(t)$

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

则可得  $\text{supp}P(\hat{D}_n^j) \subset R^+$ , 且当  $N+1$  个随机变量序列  $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\sigma_n^j\}_{n=0}^{\infty} (1 \leq j \leq N)$  相互独立,

$\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$  相互独立, 对  $\forall j=1, 2, \dots, N$ ,  $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$  相互独立时,  $d_n^j$  的分布函数  $D_n^j$  与  $\hat{D}_n^j$  之间有随机序关系

$$D_n^j \leq_{st} \hat{D}_n^j, \quad \forall n \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

并且在  $E(\sigma_n^j) < E(\tau_n)$  的条件下, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\hat{D}_n^j$  弱收敛于一有限分布函数  $\hat{D}_\infty^j$ , 且有序关系

$$D_\infty^i \leq_{st} \hat{D}_\infty^j, \quad 1 \leq i \leq j \leq N.$$

对前节描述的  $K$  个子网络并联的 Fork-Join 网络, 也可得到某些序关系. 若响应时间的分布函数分别为  $df(R_n)$ ,  $df(R_n^i)$ ,  $i=1, 2, \dots, K$ , 则在独立性假设下, 得序关系

$$df(R_n) \leq_{st} \prod_{i=1}^K df(R_n^i).$$

由上可知: 应用凸序和随机序方法虽然可以对随机变量和分布函数进行估界, 但这种估界只是定性的, 它不能估界状态分布以及系统的各种指标, 因此, 没有从根本上解决一般 AFJQN 的问题, 急待提出解决问题的新方法. 尽管对一般 AFJQN 的研究仅限于求近似解和估界, 但对  $N=2$  的 Fork-Join 网络还是获得了比较完善的解析理论.

### 3 $N=2$ 的 Fork-Join 网络分析

#### 3.1 稳定概率的计算<sup>[10]</sup>

考察如图 3 的具有两个并联服务台的 Fork-Join 排队网络. 假定每个队列均具有无限排队空间, 服务规则是先到先服务; 顾客到达流服从均值为 1 的 Poisson 过程, 服务台 1 和 2 分别具有服务率  $\alpha$  和  $\beta$  的指数服务时间分布, 且服务过程相互独立, 顾客完成服务后总能输出, 不失一般性, 以下总假定  $\alpha \leq \beta$ .

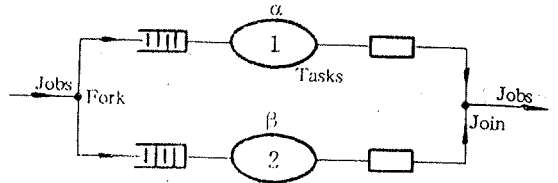


图 3 两个并联服务台的 Fork-Join 网络

令  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  分别为时刻  $t$  时服务台 1 和服务台 2 前的队长 (包括正在接受服务的顾客), 则  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$  组成一个二维的 Markov 链, 其状态空间为:  $\{(m, n): m \geq 0, n \geq 0\}$ .

取  $P_{mn}(t) = P(X_1(t) = m, X_2(t) = n)$ , 那么由稳态条件可以知道: 当  $\alpha > 1, \beta > 1$  时, 其极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{mn}(t) = P_{mn}$  存在, 且  $P_{mn} > 0$ ,  $\sum_{m,n=0}^{\infty} P_{mn} = 1$ . 而  $P_{mn}$  与初始状态分布  $P_{mn}(0)$  无关. 称

$\{P_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$  为系统的稳态概率分布, 其母函数为  $P(z, w) = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_{mn} z^m w^n$ .

对于上述系统, 可由 Kolmogorov 前向方程<sup>[24]</sup> 建立其稳态方程, 并用母函数表示为

$$Q(z, w)P(z, w) = N(z, w), \quad |z| < 1, \quad |w| < 1.$$

其中

$$Q(z, w) = (1 + \alpha + \beta)zw - \alpha w - \beta z - z^2 w^2,$$

$$N(z, w) = \beta z(w - 1)P(z, 0) + \alpha w(z - 1)P(0, w).$$

因此, 只要求出  $P(z, 0)$  和  $P(0, w)$  即可给出  $P(z, w)$  的显表达式, 从而获得稳态概率分布  $\{P_{mn}\}_{m,n=0}^{\infty}$ .

在给出主要结论之前, [10] 先讨论了  $Q(z, w)$  的性质. 首先, 若令  $D_1(z) = [(1 + \alpha + \beta)z - \alpha]^2 - 4\beta z^3$ ,  $D_2(z) = [(1 + \alpha + \beta)w - \beta]^2 - 4\alpha w^3$  分别为  $Q(z, w) = 0$  关于  $w$  和  $z$  的判别式.

则  $D_1(z)=0$  和  $D_2(w)=0$  分别有三个不同实根  $a_1, a_2, a_3$  和  $b_1, b_2, b_3$ , 满足

$$1) 0 < a_1 < a_2 < 1 < a_3, \quad 0 < b_1 < b_2 < 1 < b_3;$$

$$2) b_j = \frac{\beta}{\alpha} a_j, \quad \alpha \leq a_3 \leq \beta \leq b_3.$$

其次, 由 Schwartz-Christoffel 变换<sup>[26]</sup>及其性质, 可将曲线

$$S = \{(z, w); Q(z, w) = 0, |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$$

由椭圆函数对  $z=z(t)$  和  $w=w(t)$  参数表出.

若取

$$A(t) = P(z(t), 0), \quad B(t) = P(0, w(t)),$$

则有

$$1) A(t) = A(-t), \quad \forall t \in \bar{D}_z.$$

$$2) B(4m-t) = B(t), \quad \forall t \in \bar{D}_w.$$

$$3) B(t) = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{z(t)(w(t)-1)}{w(t)(z(t)-1)} A(t), \quad \forall t \in \bar{D}_z \cap \bar{D}_w.$$

其中  $D_z = \{t: |z(t)| < 1\}$ ,  $D_w = \{t: |w(t)| < 1\}$ ,  $m$  为  $Z(t)$  的一个零点.

有了上述性质, 可得  $P(z, 0)$  和  $P(0, w)$  的解析表达式<sup>[10]</sup>

$$P(z, 0) = \frac{\beta - 1}{\beta} \frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}, \quad |z| < 1,$$

$$P(0, w) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\Psi(w)}{\Psi(1)}, \quad |w| < 1.$$

其中  $\Phi(z)$  和  $\Psi(w)$  均为已知函数.

[26] 还对上述系统作了时间离散化, 获得了类似的稳态概率分布.

### 3.2 等待时间分布和响应时间分布

令  $w_i (i=1, 2)$  为队列  $i$  中的稳态等待时间, 即顾客进入队列  $i$  的时刻与该顾客开始接受服务的时刻之间的延迟; 由于各队列输入的同时性, 使得  $w_1$  和  $w_2$  是相互联系的, 其联合分布  $w(x, y)$  的显表达式不易得到, 但 [26] 给出了  $w(x, y)$  的二维 Laplace 变换式

$$w^*(s, t) = \frac{1}{st} P\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}, \frac{\beta}{t+\beta}\right), \quad \text{Res} > 0, \quad \text{Ret} > 0.$$

从理论上讲, 可通过求解  $w^*(s, t)$  的二维 Laplace 反变换可获得  $w(x, y)$ , 但由于  $w^*(s, t)$  的复杂性以及计算二重积分的困难性, 还是不易求得  $w(x, y)$ , 因此寻求一种快速而精确的计算反变换的方法是有待解决的问题. 尽管如此, [26] 还是用 Laplace 反变换法获得了诸如  $P(w_1 \leq x, w_2 = 0)$ ,  $P(w_1 = 0, w_2 \leq y)$  和  $P(w_1 + w_2 \leq x)$  函数的显表达式.

再转而讨论系统的响应时间  $R$ . 对于本节描述的系统, 其响应时间  $R = \max(w_1 + \sigma_1, w_2 + \sigma_2)$ , 由卷积公式可写出其分布函数  $R(x)$

$$R(x) = \alpha \beta e^{-(\alpha+\beta)x} \int_0^x \int_0^x w(u, v) e^{-(\alpha u + \beta v)} du dv.$$

从理论上讲, 只要知道  $w(u, v)$ , 即可由上述积分式求得  $R(x)$ , 但由于  $w(u, v)$  本身的计算难于解决, 更何况在计算  $R(x)$  时还求一个二重积分呢? 然而, 当  $\alpha = \beta > 1$  时, [26] 给出了用 Bessel 函数表示的  $R(x)$  的显表达式.

### 3.3 渐近公式

上面已得状态分布的母函数  $P(z, w)$  及其一些特殊的分布  $P(w_1 \leq x, w_2 = 0)$ ,  $P(w_1 = 0, w_2 \leq y)$ ,  $R(x)$  的显表达式, 但是从形式上看相当复杂, 不便于计算; 并且虽然从原理上将  $P(z, w)$  展成级数, 获得状态分布  $\{P_{mn}\}$ , 但因  $P(z, w)$  的复杂性, 导致了计算  $\{P_{mn}\}$  的困难. 因此, 为了计算方便, 给出相应的渐近公式势在必行.

当  $m, n$  中一个固定, 另一个足够大时,  $P_{mn}$  有如下渐近公式<sup>[10]</sup>:

1)  $\alpha < \beta$  时,

$$\text{固定 } n, \text{ 则 } P_{mn} \sim \frac{c_1}{\alpha^{n-1} \beta^n}, \quad (m \rightarrow \infty).$$

$$\text{固定 } m, \text{ 则 } P_{mn} \sim c_2 \frac{1+m[1-(\alpha/b_3)^{1/2}]}{n^{3/2} \alpha^{1/2} b_3^{n-m/2}}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

2)  $\alpha = \beta$  时,

$$\text{固定 } m, \text{ 则 } P_{mn} \sim \frac{c_3}{m^{1/2} \alpha^n}, \quad (n \rightarrow \infty).$$

其中  $c_1, c_2, c_3$  均为仅与  $\alpha, \beta$  和  $a_3$  有关的常数.

[27]应用最速下降法获得了状态变量条件分布的极限定理

1)  $\alpha < \beta$  时, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(x_2 = n | x_1 = m) = \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-n-1}, \quad n \geq 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(x_1 < \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1} n + x \sqrt{n} \mid x_2 = n\right) = \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} dt, \quad x \in R.$$

2)  $\alpha = \beta$  时, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(x_2 < \sqrt{m} x \mid x_1 = m) = \frac{1}{\alpha_3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2\alpha_3^2}} dt, \quad x \geq 0.$$

此外, 当  $\alpha = \beta$  时, [26]还给出了  $P(w_1 \leq x, w_2 = 0)$ ,  $P(w_1 = 0, w_2 \leq x)$  和  $R(x)$  的渐近公式, 但当  $\alpha \neq \beta$  时, 当  $x, y \rightarrow \infty, i, j \rightarrow \infty$  时,  $w(x, y), R(x)$  和  $P_{ij}$  的渐近公式仍未得到.

## 4 结束语

Fork-Join 排队网络是广泛存在于计算机处理系统和 FMS 中的一类 DEEDS, 目前国外对该类系统的研究仍是方兴未艾, 且应用于计算机性能分析<sup>[28, 29]</sup>, 但目前所采用的方法大多是排队网络法、分解法、近似等价法以及用随机序的估界法, 且对网络也提出了诸如指数服务时间分布、顾客同类型、排队空间无限以及顾客逐个输入等苛刻条件. 因此, 放宽或取消某些限制是值得进一步研究的, 特别是采用排队网络方法求解联合分布时极为困难, 应用解决 DEEDS 问题的其它有效方法或提出新方法, 才能为解决此类具有同步性的网络提供更广泛的途径. 此外, 目前对该类网络的研究正处于性能分析阶段, 还没有文献研究控制、优化等问题, 因此, 对该网络的控制、设计及优化等问题需大批学者攻关.

本文较详细地介绍了对 Fork-Join 排队网络的最新研究成果, 旨在试图引起人们尤其是国内同行对这类问题的重视, 相信在大家的共同努力下, 会找到更多更好的方法以促进 Fork-Join 网络理论的发展和运用.



## 参 考 文 献

- [1] Challenges to Control; A Collective View. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987, AC-32(4);275—285
- [2] Baccelli, F., Massey, W. A. and Towsley, D.. Acyclic Fork-Join Queueing Networks. *J. ACM*, 1989, 36(3);615—642
- [3] Chandy, K. M. and Martin, A. J.. A Characterization of Product-Form Queueing Networks. *J. ACM*, 1983, 30(2);286—299
- [4] Suri, R.. Robustness of Queueing Network Formulas, *J. ACM*, 1983, 30(3);564—594
- [5] 郑大钟,郑应平. 离散事件动态系统理论:现状和展望. *自动化学报*,1992, 18(2);129—142
- [6] 汪自勤,宋文忠,冯纯伯. 离散事件动态系统的分析和优化——排队网络模型方法(上). *信息与控制*,1989,18(6);31—40
- [7] 汪自勤,宋文忠,冯纯伯. 离散事件动态系统的分析与优化——排队网络模型方法(下). *信息与控制*,1990,19(1);35—44
- [8] Konstantopoulos, P. and Walrand, J.. Stationary and Stability of Fork-Join Networks. *J. Appl. Prob.*, 1989, 26;604—614
- [9] Loynes, R. M.. The Stability of Queues with Nonindependent Interarrival and Service Times. *Proc. Cambridge Phys. Soc.*, 1962, 58;497—510
- [10] Flatto, L. and Hahn, S.. Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands (1). *SIAM J. Appl. Math.*, 1984, 44(5);1041—1053
- [11] Baccelli, F. and Makowski, A.. Stability and Bounds for Single Queues in Random Environment. In *Stochastic Models*, Marcel Dekker, 1986, 2(2)
- [12] Kim, C. and Agrawala, A. K.. Analysis of the Fork-Join Queue. *IEEE Trans. on Computers*, 1989, 38(2);250—255
- [13] Kim, C. and Agrawala, A. K.. Virtual Waiting Time of an Erlangian Single Server Queueing Systems. *Computer Science Univ.*, Maryland CS-TR-1620, 1985
- [14] Agrawala, A. K. and Tripathi, S. K.. Transient Solution of the Virtual Waiting Time of a Single Server Queue and Application. *Inform. Sci.*, 1980, 21(2);141—158
- [15] Papoulis, A.. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York, McGraw-Hill, 1965
- [16] Nelson, R. and Tantawi, A. N.. Approximate Analysis of Fork-Join Synchronization in Parallel Queues. *IEEE Trans. on Computers*, 1988, 37(6);739—743
- [17] Duda, A. and Czachorski, A.. Performance Evaluation of Fork and Join Synchronization Primitives. *Acta Inform.*, 1987, 24(5);525—553
- [18] Baccelli, F. and Makowski, A. M.. Single Computable Bounds for the Fork-Join Queue. *Proceedings of the Conference for Information Science and Systems*, Johns Hopkins Univ., Baltimore, Md., 1985, 436—441
- [19] Heidelberger, P. and Trivedi, K. S.. Queueing Network Models for Parallel Processing with Asynchronous Tasks. *IEEE Trans. on Computers*, 1982, 31(11);1099—1109
- [20] Heidelberger, P. and Trivedi, K. S.. Analytic Queueing Models for Programs with Internal Concurrency. *IEEE Trans. on Computers*, 1983, 32(1);73—82
- [21] Baccelli, F., Massey, W. A. and Shwartz, A.. Fork-Join Queue and Related Systems with Synchronization Constraints; Stochastic Ordering, Approximations and Computable Bounds. *J. Adv. Prob.*, 1989, 21;629—660
- [22] Chang, C. S., Chano, X. L., Pinedo, M. and Shanthikumar, J. G.. Stochastic Convexity for Multidimensional Processes and Its Applications. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, AC-36(2);1347—1355
- [23] 龙瑞麟著. *Hp 鞅论*. 北京大学出版社,1989

- [24] Cohen, J. W. . The Single Server Queue. North-Holland Amsterdam, 1982
- [25] Saks, S. and Zygmund, W. A. . Analytic Function. 2nd Edition Warsaw, 1965
- [26] Zhang, Z. S. . Analytic Results for Waiting Time and System Size Distribution in Two Parallel Queuing Systems. *SIAM J. Appl. Math.* , 1990, 50(4);1176—1193
- [27] Flatto, L. . Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands ( I ). *SIAM J. Appl. Math.* , 1985, 44(5); 861—878
- [28] Chu, W. W. , Sit, C. M. and Leung, K. K. . Task Response Time for Real-Time Distributed Systems with Resource contention. *IEEE Trans. Softw. Eng.* , 1991, 17(10);1076—1092
- [29] Nihal, Y. C. and Vincent, J. M. . Stochastic Bounds on Execution Times of Parallel Programs. *IEEE Trans. Softw. Eng.* , 1991, 17(10);1005—1012

## Advance in Modelling and Analysis of Fork-Join Queueing Networks

XU Xuelei and ZHENG Dazhong

(Department of Automation, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

**Abstract:** This paper summarizes the advance in the study of Fork-Join queuing networks which are a special class of DEFS. The paper consists of three parts. First, the actual background and mathematical description are given for the Fork-Join networks; second, the main results and methods given in literatures are presented. Finally, some open problems are pointed out.

**Key words:** Fork-Join queuing networks; modelling and analysis; synchronization; steady state distribution; response time; stochastic ordering

### 本文作者简介

徐学雷 1963年生. 1983年毕业于四川大学, 1986年在西北工业大学获硕士学位, 并留校任教, 1988年被评为讲师. 现在清华大学自动化系攻读博士学位, 主要从事离散事件动态系统的研究工作.

郑大钟 1935年生. 1959年毕业于清华大学自动控制系. 现为清华大学自动化系教授. 主要研究领域有线性系统理论, 最优控制, 大系统分散控制, 鲁棒控制, 离散事件动态系统等.