

指定极点区域的 H^∞ 设计方法及实例研究

范玉顺 吴 麒

王思平

(清华大学自动化系, 北京, 100084) (中国科学院系统科学研究所·北京, 100080)

摘要: 本文提出了一种综合考虑闭环动态性能, 鲁棒性及控制器本身稳定性的指定极点区域的 H^∞ 设计方法, 给出了利用实参数寻优求解最优控制器的方法. 并用这种方法设计了一个倒立摆平衡控制器. 仿真研究结果表明, 与 LQ 和常规 H^∞ 设计方法相比, 按本文所提出的设计方法得到的控制器具有鲁棒稳定能力强, 闭环动态性能良好及控制器稳定等优点, 具有很好的应用前景.

关键词: 极点区域; 稳定控制器; 倒立摆

1 引言

H^∞ 优化设计方法是八十年代初产生的一种线性控制系统设计方法. 由于它在鲁棒稳定性控制器设计中的明显优点, 因而得到了广泛的重视, 并且取得了很多成果. 但是由于这种方法存在的闭环动态性能欠佳和控制器不稳定等缺点, 阻碍了它在实际系统中的应用.

本文从实际出发, 提出了一种将闭环极点设置在指定的区域内的稳定控制器的 H^∞ 设计方法, 并给出了利用实参数寻优来求解最优控制器的方法. 本文进一步将这种设计方法应用于倒立摆平衡控制器的设计中. 作为对比, 文中给出了按 LQ 设计方法和常规 H^∞ 设计方法得到的倒立摆平衡控制器. 并对这三个控制器和倒立摆构成的闭环系统作了计算机数字仿真研究. 结果表明, 按本文所提出的设计方法得到的控制器具有鲁棒稳定能力强, 控制器稳定等优点. 本文提出的方法既保持了 H^∞ 设计方法鲁棒性好的优点, 又克服了常规 H^∞ 设计方法控制器不稳定等缺点, 因此具有良好的应用前景.

2 指定极点区域的 H^∞ 设计方法

考虑图 1 所示的线性控制系统. 其中 G 为对象标称传递函数, K 为控制器传递函数. ΔG 为对象摄动, ΔG 满足 G 和 $G + \Delta G$ 具有相同数目的不稳定极点, 且

$$\bar{\sigma}(\Delta G(j\omega)) < |W(j\omega)|, \quad \forall \omega. \quad (2.1)$$

其中 $\bar{\sigma}(\Delta G(j\omega))$ 代表 $\Delta G(j\omega)$ 的最大奇异值, $W(s)$ 为稳定最小相函数.

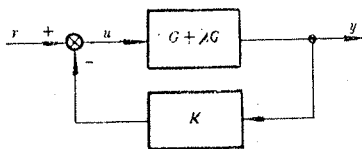


图 1 线性控制系统框图

H^∞ 鲁棒最优设计问题^[1]为求解控制器 K 镇定对象 G , 且极小化如下的鲁棒性指标

$$J = \|WKS\|_\infty, \quad (2.2)$$

• 高等院校博士学科点专项科研基金资助项目.

本文于1990年12月24日收到. 1991年7月26日收到修改稿.

$S=(I+GK)^{-1}$ 为系统灵敏度函数.

按上述设计要求得到的控制器对于由(2.1)式所描述的对象扰动具有最好的鲁棒稳定性能力.但是此控制器并不能保证良好的闭环动态性能,且控制器本身可能是不稳定的.以上不足阻碍了它在实际系统中的应用.

考虑闭环动态性能及控制器稳定性和鲁棒性的要求,所设计的控制器 K 必须满足

- 1) 闭环极点位于指定极点区域内;
- 2) 控制器 K 是稳定的;
- 3) 极小化指标(2.2).

设 D 为左半平面内的一个指定极点区域, D 为关于实轴对称的开凸集.

定义 2.1 $\text{RH}_D^\infty \triangleq \{f \mid f \in \text{RH}^\infty, f \text{ 的极点在 } D \text{ 内}\}$.

引理 2.1^[4] RH_D^∞ 为一个主理想整环.

定义 2.2 设 $f, g \in \text{RH}_D^\infty$. 如果 f, g 在 D^c 内无公共零点,则 f, g 称为互质的.

其中 D^c 表示 D 关于整个复平面的补集.

引理 2.2^[2] 设 R 为主理想整环. $x, y \in R$ 互质当且仅当存在 $p, q \in R$ 满足 $px + qy = 1$.

作对象 G 在 RH_D^∞ 上的互质分解

$$G = d^{-1}n, \quad (2.3)$$

$n, d \in \text{RH}_D^\infty$, 互质. 由于 RH_D^∞ 是主理想整环, 因此存在 $x, y \in \text{RH}_D^\infty$, 使得

$$xd + yn = 1. \quad (2.4)$$

定理 2.3^[4] 给定对象 $G = d^{-1}n$, 其中 $n, d \in \text{RH}_D^\infty$, 互质. 则使闭环极点位于指定区域 D 内的控制器 K 的集合为

$$K = (y + Qd)(x - Qn)^{-1}. \quad (2.5)$$

其中 $x, y \in \text{RH}_D^\infty$, 满足(2.4), $Q \in \text{RH}_D^\infty$ 为参数.

现在指标(2.2)参数化为

$$J = \|W(y + Qd)d\|_\infty. \quad (2.6)$$

由(2.5)可以看出, 控制器 K 稳定的充分必要条件为 $(x - Qn)^{-1} \in \text{RH}^\infty$. 问题在于是否存在参数 $Q \in \text{RH}_D^\infty$ 使得 $(x - Qn)^{-1} \in \text{RH}^\infty$.

定义 2.3 对于一个对象 G , 如果存在一个稳定的控制器 K 使得闭环极点位于指定极点区域 D 内, 则称 G 为 D 强可镇定的.

当 D 为开左半平面时, 则 G 为 D 强可镇定的就等于 G 强可镇定的^[2].

引理 2.4^[2] 给定对象 $G = d^{-1}n$, 其中 $d, n \in \text{RH}^\infty$, 互质. 则 G 为强可镇定的, 当且仅当 $d(\cdot)$ 在 n 的位于 C_+ 的所有互异实零点处的值具有相同符号.

定理 2.5 给定对象 $G = d^{-1}n$, 其中 $d, n \in \text{RH}_D^\infty$, 互质. 则 G 为 D 强可镇定的, 如果在 $d(\cdot)$ 在 n 的位于 D^c 的所有互异实零点处的值具有相同符号.

证 类似于引理 2.4 的证明, 唯一的区别是在构造插值函数时, 其极点必须选在区域 D 内. 兹略.

由以上定理可知, 当对象 G 为 D 强可镇定时, 必存在稳定控制器 K 使闭环极点位于区域 D 内, 从而必存在参数 $Q \in \text{RH}_D^\infty$ 使得 $(x - Qn)^{-1} \in \text{RH}^\infty$. 因此设计具有良好的闭环动态性能, 具极小化鲁棒性指标(2.6)的稳定控制器 K 的问题就化为求最优参数 $Q \in \text{RH}_D^\infty$,

满足 $(x - Q_n)^{-1} \in RH^\infty$ 且极小化指标 (2.6). 这个问题是一个带有约束的最优化问题, 难于解析求解. 以下我们给出一种实参数寻优求解 Q 的方法.

对于 RH^∞ 中阶数为 t 的参数 Q 可表示为

$$Q = \frac{b_0 s^t + b_1 s^{t-1} + \dots + b_t}{s^t + a_1 s^{t-1} + \dots + a_t} \quad (2.7)$$

其中 $b_0, a_i, b_i (i=1, \dots, t)$ 为实数, 且下述代数方程的根均位于区域 D 内

$$s^t + a_1 s^{t-1} + \dots + a_t = 0. \quad (2.8)$$

因此判断形如 (2.7) 的有理数函数 Q 是否属于 RH^∞ , 可以通过判断代数方程 (2.8) 的根是否属于 D 来确定, 同样判断 $(x - Q_n)^{-1} \in RH^\infty$ 则可以通过判断 $(x - Q_n)$ 的分子多项式的根是否位于 C_{+} 来决定.

在假设最优参数 Q 为 (2.7) 的形式时, 通过对满足约束条件 $Q \in RH^\infty$ 和 $(x - Q_n)^{-1} \in RH^\infty$ 的实数 $b_0, a_i, b_i (i=1, \dots, t)$ 和整数 t 进行寻优, 可找到使指标 (2.6) 达到极小的最优参数 Q^* . 由此最优参数 Q^* 可得最优控制器 K^* .

3 倒立摆平衡控制器的设计与仿真

倒立摆平衡控制系统如图 2 所示. 摆和车的运动方程为

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - F_1\dot{\theta} - m\dot{r}l\cos\theta, \quad (3.1)$$

$$G_0u - F\dot{r} - m\ddot{r} - M\ddot{r} = ml \frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta). \quad (3.2)$$

其中 r 为小车位置, θ 为摆的角位移, M 为小车质量, m 为摆的质量, l 为摆的重心至转轴的长度, J 为摆对重心的转动惯量, F 为小车系统的摩擦系数, F_1 为摆的摩擦阻力矩系数, G_0 为电机放大系数, u 为系统的输入, g 为重力加速度.

系统参数的标称值为 $M = 0.25\text{kg}$; $m = 0.15\text{kg}$; $l = 0.33\text{m}$; $g = 9.8\text{m/s}^2$; $F = 10\text{kg/s}$; $G_0 = 13\text{N/V}$; $F_1 = 0.0015\text{kgm}^2/\text{s}$.

令 $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \dot{r}, x_4 = \dot{\theta}, y = (r, \theta)^T$,

在平衡点处 ($\theta = \dot{\theta} = 0, r = \dot{r} = 0$) 对上述方程进行线性化后, 代入参数值后得状态方程

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad (3.3)$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_3 = -3.83x_2 - 35x_3 + 0.012x_4 + 47.25u, \quad (3.5)$$

$$\dot{x}_4 = 30.8x_2 + 79x_3 - 0.09x_4 - 104.7u, \quad (3.6)$$

$$y_1 = x_1, \quad (3.7)$$

$$y_2 = x_2. \quad (3.8)$$

其传递函数矩阵为

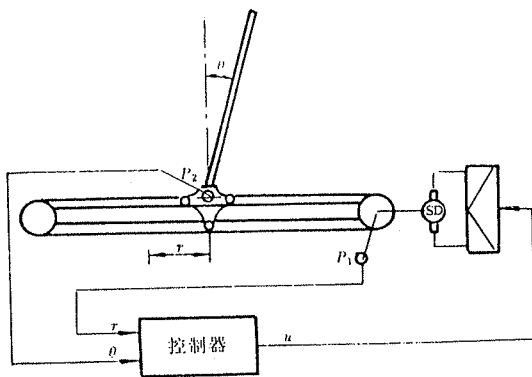


图 2 倒立摆控制系统示意图

$$G(s) = \left[\frac{47.25(s+4.755)(s-4.692)}{s(s+35.278)(s+4.596)(s-4.783)} - \frac{104.7(s-0.652)}{(s+35.278)(s+4.596)(s-4.783)} \right] \quad (3.9)$$

以下我们给出对以上线性化后的系统用三种设计方法所设计的控制器.

1) LQ 设计方法

按 LQ 设计方法得到的最优全状态反馈律为^[3]

$$K^* = [-1, -5.9, -2, -1], \quad (3.10)$$

相应的降维状态观测器为

$$\dot{z}_1 = -35z_1 + 0.0012z_1 - 3.77y_2 + 47.25u, \quad (3.11)$$

$$\dot{z}_2 = 79z_1 - 5.09z_2 + 5.35y_2 - 104.7u, \quad (3.12)$$

$$\hat{x}_3 = z_1, \quad (3.13)$$

$$\hat{x}_4 = z_2 + 5y_2. \quad (3.14)$$

2) 常规 H^∞ 设计方法

按常规 H^∞ 设计方法, 取系统的性能指标采用加权鲁棒性指标

$$J = \|WKS\|_\infty, \quad (3.15)$$

经过一定的比较后, 选择加权函数为

$$W(s) = \frac{s+0.5}{s+5}. \quad (3.16)$$

求解上述 H^∞ 鲁棒最优设计问题得最优控制器为^[4]

$$K^* = \frac{1}{d(s)} [n_1(s), n_2(s)], \quad (3.17)$$

$$d(s) = (s+54.44)(s+6.017)(s+2.155)(s-5.663),$$

$$n_1(s) = -0.0381(s+35.277)(s+27.48)(s+6)(s+4.596),$$

$$n_2(s) = -8.314(s+35.277)(s+6)(s+4.596)(s+2).$$

该控制器是不稳定的.

3) 本文提出的指定极点区域设计方法

取预期闭环极点区域为

$$D = \{s | \operatorname{Re}(s) < -0.9, |\operatorname{Im}(s)| < |\operatorname{Re}(s)|\}. \quad (3.18)$$

性能指标为鲁棒性指标 $J = \|WKS\|_\infty$, 经过一定的比较后, 选择加权矩阵为

$$W(s) = \frac{s+1}{s+10}. \quad (3.19)$$

按本文所述的设计方法求得最优控制器为

$$K^* = \frac{1}{d(s)} [n_1(s), n_2(s)], \quad (3.20)$$

$$d(s) = (s+47.87)(s+4.755)(s^2+0.663s+7.743)(s+0.128),$$

$$n_1(s) = -3.084(s+35.28)(s+4.596)(s+0.427)(s+0.103)(s-5.408),$$

$$n_2(s) = 3.524(s+35.28)(s+5.709)(s+4.757)(s+4.594)(s+0.714).$$

5期

对以上三种控制器和倒立摆的非线性模型构成的闭环系统分别进行了数字仿真研究。表1给出了控制器能稳定的最大静态初始偏角 θ_m (初始值 $r = \dot{r} = 0, \dot{\theta} = 0, \theta = \theta_m$)。表2给出了在初始偏角为 30° 情况下, 保持闭环系统稳定允许系统参数 M, m, l, F 的上界。这一组参数比较充分地反映了控制器鲁棒稳定能力。图3给出了在初始偏角 30° 情况下, 三种控制器构成的闭环系统的摆偏角 θ 的动态响应曲线。

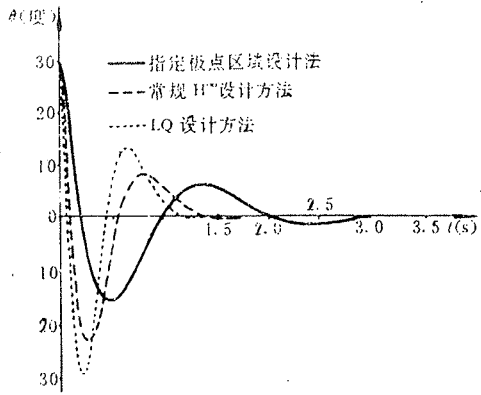


图3 3种控制器的闭环动态响应曲线

表1 控制器能稳定的最大初始偏角 θ_m

控制器 仿真结果	全状态反馈 控制器	常规 H^∞ 控制器	按指定极点 区域法设计的 控制器
标称参数时	42°	51°	60°
参数摄动+20%	31°	40°	53°

表2 初始偏角为 30° 时参数的摄动上界

控制器 仿真结果	全状态反馈 控制器	常规 H^∞ 控制器	按指定极点 区域法设计的 控制器
M	0.43	0.58	1.31
m	0.55	0.83	1.80
l	0.40	0.46	0.56
F	12.1	13.1	30.0

由以上仿真结果可以看出, 按本文提出的指定极点区域法设计的控制器所允许的初始偏角 θ_m 和参数变化范围最大, 因此它具有最好的鲁棒稳定能力。它的闭环动态性能也是良好的。另外它还具有控制器稳定的优点。这个优点是常规 H^∞ 设计方法所没有的。因此, 这个设计方法具有很好的工程应用前景。

参 考 文 献

- [1] Kimura, H.. Robust Stabilization for a Class of Transfer Functions, IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29:164-176
- [2] Vidyasagar, M.. Control System Synthesis, A Factorization Approach. MIT Press, Cambridge, 1985
- [3] 汪志平. 倒立摆模拟控制研究. 清华大学毕业设计论文, 1985
- [4] 范玉顺. H^∞ 范数设计理论研究及工程应用. 清华大学博士学位论文, 1990

H^∞ Design Method for Assigned Poles Region and Case Study

FAN Yushun and WU Chi

(Department of Automation, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

WANG Enping

(Institute of System Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: In this paper, an H^∞ design method for assigned poles region is proposed. The method considers closed-loop dynamic performance, robustness and controller's stability as a whole. A method of obtaining optimal controller using real parameter optimization is given. An inverted pendulum equilibrium controller is designed using the proposed method. Simulation results show that, compared with the controllers designed by LQ and conventional H^∞ design methods, the controller designed by the proposed method has the advantages of strong robust stability, good closed-loop dynamic performance and stable controller. Hence, the proposed method has good application prospect.

Key words: poles region; stable controller; inverted pendulum

本文作者简介

范玉顺 1962年生. 1990年在清华大学自动化系获博士学位, 现在清华大学自动化系从事CIMS科研工作, 目前主要研究兴趣是FMS的可靠性与故障诊断, Petri网和FMS的调度问题.

吴麒 1930年生. 教授. 1952年毕业于清华大学电机系. 目前主要研究兴趣是多变量频率域控制理论, 鲁棒控制, 控制系统的智能设计.

王恩平 1941年生. 研究员. 1965年毕业于北京大学数学力学系. 现在中国科学院系统科学研究所工作. 主要研究领域有现代控制理论在惯性导航系统中的应用, 线性系统, 广义系统, 分散系统以及鲁棒控制等.