利用移位勒让德多项式对时变双线性系统的辨识*

王秀峰　李　波
(南开大学计算机与系统科学系·天津,300071)

摘要: 本文提出了利用移位勒让德(Shifted Legendre)多项式辨识时变双线性系统的一个方法. 首先,利用移位勒让德多项式展开和积分运算矩阵,把微分方程化为便于计算机计算的矩阵代数方程形式;然后解代数方程从而得到双线性系统未知时变参数的估计;最后给出了仿真例子. 本文的方法不仅简化了计算,而且给出了相当精确的辨识结果.

关键词: 系统辨识;双线性系统;勒让德多项式

1 引　言

近年来,除了少数作者用直接方法对双线性系统辨识外[1],更多的作者是用各种正交函数系对双线性系统进行分析和参数辨识. 如沃尔什(Walsh)函数[2,3]、块脉冲(Block-Pulse)函数[4,5],等等. 沃尔什函数方法是最先采用的方法,但它需二次近似计算,不仅较复杂,而且精度一般也不高. 块脉冲函数方法的优点是比较简单,但是当系统的动态特性比较复杂时,精度则很低.

最近几年来,移位勒让德(Shifted Legendre)多项式(简称 SLP)广泛地应用于系统的辨识和分析[6,7]. 在双线性系统分析和辨识中,它与用其它正交函数进行分析和辨识的基本思路是一致的,即通过积分把微分方程转化为积分方程,将积分方程中的各变量用截尾的正交函数近似,最后用积分运算矩阵化为一组代数方程. 但由于 SLP 的正交权函数唯一,积分运算矩阵是三对角形的以及多项式的三次乘积的定积分可以递推计算,所以计算比较简单;同时它克服了沃尔什函数和块脉冲函数方法精度不高的缺点;并且可直接从量测数据计算展开式系数,大大简化了计算量.

本文借助于文献[8]给出了关于 SLP 的一些性质,将 SLP 应用到对时变双线性系统的辨识,并且给出将多变量双线性时变系统分解为子系统的辨识方法,不仅简化了计算,而且提高了精度.

2 移位勒让德多项式简介

定义在区间$[0,t_f]$上的勒让德多项式 $s_i(t)$, $i=1,2,\cdots$,满足如下的递推关系式

$$(i+1)s_{i+1}(t)=(2i+1)(2t/t_f-1)s_i(t)-is_{i-1}(t). \tag{2.1}$$

其中
$$s_0(t)=1,\quad s_1(t)=2t/t_f-1.$$

这样由递推关系式(2.1)所定义的多项式 $s_i(t)$称为 Shifted Legendre 多项式.

---

* 国家自然科学基金资助课题.
本文于1991年2月1日收到. 1991年9月20日收到修改稿.

SLP 的性质如下：

1) SLP 在区间$[0,t_f]$上正交

$$\int_0^{t_f} s_i(t)s_j(t)\mathrm{d}t = \frac{t_f}{2i+1}\delta_{ij}.$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{2.2}$$

2) 对任意定义在$[0,t_f]$上平方可积函数 $f(t)$ 有

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i s_i(t).$$

其中

$$f_i = \frac{2i+1}{t_f}\int_0^{t_f} f(t)s_i(t)\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

在实际应用中，常取足够大的前 m 项来近似等于 $f(t)$，即

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{m-1} f_i S_i(t) = f_{(m)}^{\mathrm{T}}(t)S_{(m)}(t) = S_{(m)}^{\mathrm{T}}(t)f_{(m)}. \tag{2.4}$$

其中

$$f_{(m)} = [f_0\ f_1\ \cdots\ f_{m-1}]^{\mathrm{T}},$$
$$S_{(m)}^{\mathrm{T}}(t) = [s_0(t)\ s_1(t)\ \cdots\ s_{(m-1)}(t)]^{\mathrm{T}}.$$

3) SLP 满足如下积分方程

$$\begin{cases} \int_0^t s_0(\tau)\mathrm{d}\tau = t = \frac{t_f}{2}[s_0(t) + s_1(t)], \\ \int_0^t s_i(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{t_f}{2(2i+1)}[s_{i+1}(t) - s_{i-1}(t)], \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots. \tag{2.5}$$

由此可得到

$$\int_0^t S_{(m)}(\tau)\mathrm{d}\tau \cong H_{(m)}S_{(m)}(t). \tag{2.6}$$

其中

$$H_{(m)} = \frac{t_f}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & A & \end{bmatrix}, \quad A = (a_{ij}),$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{-1}{2i+1}, & j = i-1, \\ \frac{1}{2i+1}, & j = i+1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$i = 1,\cdots,m-1, \quad j = 0,\cdots,m-2. \tag{2.7}$$

4) 任意两个 SLP 如 $s_i(t),s_j(t)$，乘积 $s_i(t)s_j(t)$ 可由 m 项 SLP 序列来近似表示

$$s_i(t)s_j(t) \cong \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ijk}s_k(t). \tag{2.8}$$

其中

$$\alpha_{ijk} = \frac{2k+1}{t_f}\int_0^{t_f} s_i(t)s_j(t)s_k(t)\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

令

$$g_{ijk} = \int_0^{t_f} s_i(t)s_j(t)s_k(t)\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

则由文献[8]可知 g_{ijk}的递推公式为

$$g_{ijk}=\begin{cases}0, & i\geqslant j,\quad k\neq i-j+2l,\quad l=0,1,\cdots,j,\\ \dfrac{a_l a_{j-l}a_{i-j+l}}{a_{i+l}}\dfrac{t_f}{2i+2l+1}, & i\geqslant j,\quad k=i-j+2l,\quad l=0,1,\cdots,j.\end{cases}\tag{2.11}$$

其中
$$a_{l+1}=\left(\frac{2l+1}{l+1}\right)a_l,\quad a_0=1.\tag{2.12}$$

同样,对可积函数 $c(t)$和 $f(t)$的乘积也可表示为

$$c(t)f(t)=C^{\mathrm{T}}_{(m)}S_{(m)}(t)S^{\mathrm{T}}_{(m)}(t)f_{(m)}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}c_if_js_i(t)s_j(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}w_ks_k(t)\triangleq W^{\mathrm{T}}_{(m)}S_{(m)}(t).\tag{2.13}$$

其中
$$W_{(m)}=Cf_{(m)},\tag{2.14}$$

$$C=(c_{ij}),\quad c_{ij}=\frac{2i+1}{t_f}\sum_{k=0}^{m-1}g_{kij}c_k,\quad i,j=0,1,\cdots,m-1.$$

3 时变双线性系统的参数辨识

考虑时变双线性系统的模型为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+\sum_{l=1}^{r}C_l(t)x(t)u_l(t),\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $A(t)_{n\times n}$,$B(t)_{n\times r}$,$C_l(t)_{n\times n}$,$x(t)$为 n 维向量,$u(t)$为 r 维向量,$u_l(t)$为 $u(t)$的第 l 个分量.对(3.1)式从 0 到 t 积分得到

$$x(t)-x(0)=\int_0^t A(\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^t B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{r}C_l(\tau)x(\tau)u_l(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{3.2}$$

利用 SLP 序列对 $x(t)$,$u(t)$,$A(t)$,$B(t)$和 $C_l(t)$分别近似表示如下

$$x(t)=[x_1(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}.\tag{3.3}$$

其中
$$x_k(t)=[x_{k0}\ x_{k1}\ \cdots\ x_{km-1}]S_{(m)}(t),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

$$u(t)=[u_1(t)\ u_2(t)\ \cdots\ u_r(t)]^{\mathrm{T}}.\tag{3.4}$$

这里
$$u_k(t)=[u_{k0}\ u_{k1}\ \cdots\ u_{km-1}]S_{(m)}(t),\quad k=1,2,\cdots,r.$$

下边考虑 $A(t)x(t)$

$$A(t)x(t)=(a_{ij})_{n\times n}(x_i(t)).\tag{3.5}$$

只考虑第 k 个子系统中 $A(t)$的参数即 $A(t)x(t)$的第 k 行元素

$$a_{k1}(t)x_1(t)+\cdots+a_{kn}(t)x_n(t),$$

先取连和式中的一项如 $a_{kj}x_j(t)$来分析,

$$a_{kj}(t)x_j(t)=[a_{kj0},\cdots,a_{kjm-1}]S_{(m)}(t)S^{\mathrm{T}}_{(m)}(t)[x_{j0},\cdots,x_{jm-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$=[a_{kj0},\cdots,a_{kjm-1}]GX_jS_{(m)}(t).\tag{3.6}$$

其中
$$GX_j=(GX_j^{kl}),\quad GX_j^{kl}=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{2l+1}{t_f}g_{kil}x_{ji},\quad l,k=0,\cdots,m-1.$$

由此
$$a_{k1}(t)x_1(t)+a_{k2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{kn}(t)x_n(t)=A_kGXS_{(m)}(t).\tag{3.7}$$

其中

$$A_k = [a_{k10} \cdots a_{k1m-1}\ a_{k20} \cdots a_{k2m-1} \cdots a_{kn0} \cdots a_{knm-1}],$$
$$GX = [GX_1\ GX_2 \cdots GX_n]^{\mathrm{T}}. \tag{3.8}$$

同样考虑 $B(t)u(t)$ 的第 k 行元素，类似可得到

$$b_{k1}(t)u_1(t) + b_{k2}(t)u_2(t) + \cdots + b_{kr}(t)u_r(t) = B_kQS_{(m)}(t). \tag{3.9}$$

其中

$$B_k = [b_{k10} \cdots b_{k1m-1}\ b_{k20} \cdots b_{k2m-1} \cdots b_{kr0} \cdots b_{krm-1}],$$
$$Q = [QU_1\ QU_2 \cdots QU_r]^{\mathrm{T}}, \tag{3.10}$$
$$QU_j = (QU_j^{kl}), \quad QU_j^{kl} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2l+1}{t_f} g_{kil} u_{ji},$$
$$j = 1,2,\cdots,r. \quad k,l = 0,\cdots,m-1.$$

同样的方法应用于 $C_l(t)x(t)u_l(t)$ 的第 k 行元素可得到

$$[c_{lk1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{lkn}(t)x_n(t)]u_l(t)$$
$$= [c_{lk1}^0 \cdots c_{lk1}^{m-1} \cdots c_{lkn}^0 \cdots c_{lkn}^{m-1}]GXS_{(m)}(t)S_{(m)}^{\mathrm{T}}(t)u_l(m)$$
$$= C_{lk}GXU_lS_{(m)}(t). \tag{3.11}$$

其中 GX 同(3.8)式

$$U_l = (u_l^{kj}), \quad u_l^{kj} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2j+1}{t_f} g_{kij} u_{li},$$
$$l = 1,2,\cdots,r. \quad k,j = 0,\cdots,m-1, \tag{3.12}$$
$$C_{lk} = [c_{lk1}^0 \cdots c_{lk1}^{m-1} \cdots c_{lkn}^0 \cdots c_{lkn}^{m-1}],$$

初始值

$$x(0) = [v_1(t)\ v_2(t) \cdots v_n(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{3.13}$$

其中

$$v_i(t) = [v_{i0}, v_{i1}, \cdots, v_{im-1}]S_{(m)}(t)$$
$$= [x_i(0), 0, \cdots 0]S_{(m)}(t)$$

把式(3.3),(3.13),(3.7),(3.9)和(3.11)代入(3.2)式得到第 k 个子系统的方程为

$$x_k(t) - v_k(t) = A_kGXH_{(m)}S_{(m)}(t) + B_kQH_{(m)}S_{(m)}(t)$$
$$+ \sum_{l=1}^{r} C_{lk}GXU_lH_{(m)}S_{(m)}(t). \tag{3.14}$$

令

$$[x_{k0} \cdots x_{km-1}] - [v_{k0} \cdots v_{km-1}] = [z_{k0} \cdots z_{km-1}] = Z_k^{\mathrm{T}},$$
$$\theta_k = [A_k\ B_k\ C_{1k} \cdots C_{rk}]^{\mathrm{T}}, \tag{3.15}$$
$$\Omega_k = [(GXH_{(m)})^{\mathrm{T}}\ (QH_{(m)})^{\mathrm{T}}\ (GXU_1H_{(m)})^{\mathrm{T}} \cdots (GXU_rH_{(m)})^{\mathrm{T}}].$$

则由 SLP 的正交性可得

$$\Omega_k\theta_k = Z_k. \tag{3.16}$$

注意，这里时变系统含有 $m[(r+1)n+r]$ 个未知数，但对于一组输入，只能得到 m 个方程，要得到最小二乘估计，输入组数 q 必须不小于 $(r+1)n+r$. 假定已经得到了系统的 q 组输入和相应的输出，这时第 k 个子系统参数估计值为

$$\hat{\theta}_k = (\overline{\Omega}_k^T\overline{\Omega}_k)^{-1}\overline{\Omega}_k^T\overline{Z}_k. \tag{3.17}$$

其中

$$\overline{\Omega}_k = [\Omega_{1k}\ \Omega_{2k}\ \cdots\ \Omega_{qk}\ \cdots]^T,$$

$$\overline{Z}_k = [Z_{1k}\ Z_{2k}\ \cdots\ Z_{qk}\ \cdots]^T.$$

$\{\Omega_{ik}, Z_{ik}\}$是由第 i 组输入信号得到的第 k 个子系统的有关数据. $k=1,2,\cdots,n$.

综上所述，用 SLP 辨识时变双线性系统的计算步骤归纳如下(选定 m)：

1) 利用变步长龙格-库塔方法计算输出数据 $x(t)$(对实际系统辨识则由采样得到).

2) 利用辛普生求积分公式得到 $x(t)$和 $u(t)$的 m 维移位勒让德系数向量.

3) 利用(2.11)式计算 g_{ijk}，用(2.7)式计算 $H_{(m)}$.

4) 利用(3.8)式计算 GX，用(3.10)式计算 Q，用(3.12)式计算 U_l.

5) 利用(3.15)式摆好阵 Ω_k, θ_k, Z_k.

6) 输入另一个 $u(t)$重复 1)～5).

7) 当输入项 $q \geqslant (r+1)n+r$ 时，利用(3.17)式估计 $\hat{\theta}$，得到 $A(t), B(t), C_l(t)$的参数估计.

4 仿真例子

考虑如下时变双线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -e^{-0.5t}x(t) + e^{-0.3t}u(t) + tx(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

利用 SLP 序列辨识，对于以上单输入单输出系统至少需要$(r+1)n+r=3$个不同的输入，本例中我们利用 4 组不同的输入

$$u_1(t) = e^{-2t},\quad x_0 = 0.2,\quad u_2(t) = 2t,\quad x_0 = 0.1,$$

$$u_3(t) = te^{-t},\quad x_0 = 4.1,\quad u_4(t) = \frac{1}{(0.5+t)},\quad x_0 = 2.6.$$

在[0,1]区间以 0.01 的采样间隔，共采集 100 个数据. 利用本文的方法对时变参数进行辨识，对于 $m=4$ 和 $m=6$ 时，$A(t), B(t), C(t)$的辨识结果分别在表 1，表 2，表 3 中给出，从表中我们可以看到当 $m=6$ 时，辨识精度已相当高，相对误差在 10^{-3}以下.

表 1 $A(t)$的辨识结果($-\exp(-0.5t)$)

t	$m=4$	$m=6$	真 值
0.00	−0.996979	−0.999618	−1.000000
0.10	−0.951759	−0.951423	−0.951229
0.20	−0.906539	−0.904767	−0.904837
0.30	−0.861945	−0.860485	−0.860708
0.40	−0.818605	−0.818683	−0.818731
0.50	−0.777148	−0.779039	−0.778801
0.60	−0.738202	−0.741106	−0.741808
0.70	−0.702394	−0.704617	−0.704688
0.80	−0.670353	−0.669783	−0.670320
0.90	−0.642706	−0.637601	−0.637628
0.99	−0.622099	−0.612598	−0.609571

表 2　$B(t)$的辨识结果($-\exp(-0.3t)$)

t	$m=4$	$m=6$	真　值
0.00	1.017220	1.002164	1.000000
0.10	0.967182	0.969585	0.970446
0.20	0.932182	0.941814	0.941765
0.30	0.907571	0.914706	0.913931
0.40	0.888700	0.887178	0.886920
0.50	0.870921	0.859960	0.960708
0.60	0.849585	0.834357	0.835270
0.70	0.820044	0.811003	0.810584
0.80	0.777648	0.788622	0.786628
0.90	0.717751	0.762783	0.763379
0.99	0.645037	0.729386	0.743044

表 3　$C(t)$的辨识结果(t)

t	$m=4$	$m=6$	真　值
0.00	−0.014621	−0.001612	0.000000
0.10	0.102454	0.100712	0.100000
0.20	0.208049	0.199865	0.200000
0.30	0.305784	0.299279	0.300000
0.40	0.399281	0.399797	0.400000
0.50	0.492160	0.500726	0.500000
0.60	0.588042	0.600897	0.600000
0.70	0.690549	0.699716	0.700000
0.80	0.803300	0.798225	0.800000
0.90	0.929917	0.900156	0.900000
0.99	1.058719	1.000904	1.000000

5　结　论

本文提出的利用 SLP 序列对时变双线性系统进行参数辨识的方法比块脉冲函数方法精度要高，而比其它正交函数方法计算量小.

参　考　文　献

[1] Wang Xiufeng. Recursive Identification and Realization Algorithm of Input-output Bilinear Systems. 控制理论与应用，1989,6(2):25—35

[2] Lewis, F. L., Mertzios, V. G. Vachtsevanos, G. and Christodoulou, M. A.. Analysis of Bilinear System Using Walsh Functions. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(1):119—123

[3] 蒋芝华，蒋慰孙. 双线性系统的一种辨识方法的研究——沃尔什函数迭代法算法及其应用. 华东化工学院学报，1982,(3):359—369

[4] Cheng, B. and Hsu, N. S.. Analysis and Parameter Estimation of Bilinear System via Block-Pulse Functions. INT. J. Contr., 1982, 36(1):53—65

[5] 冯恩波，俞金寿，蒋慰孙. 一种新的时变双线性离散系统的分析及参数估计方法. 控制理论与应用，1989,6(2):44—53

[6] CHANG Rongyen and WANG Mawling. Parameter Identification Via Shifted Legendre Polynomials. ING. J. System SCI., 1982, 13(10):1125—1135

[7] HWANG Chyi and CHEN Muhyang. Analysis and Parameter Identification of Time-Delay System via Shifited Legendre Polynomials. INT. J. Contr., 1985, 41(2):403—415

[8] Hwang, C. and Chen, M. Y.. Analysis and Parameter Identification of Bilinear Systems via Shifted Legendre Polynomials. INT. J. Contr., 1986, 44(2):351—362

Parameter Identification of the Time-Varying Bilinear System via Shifted Legendre Polynomials

WANG Xiufeng and LI Bo

(Department of Computer and System Sciences, Nankai University • Tianjin, 300071, PRC)

Abstract: A method of parameter identification of the time-varying bilinear systems via shifted Legendre polynomials is presented. First, using the expansion of shifted Legendre polynomials and the operational matrix of integration, we transform the differential equations to a computationally convenient matrix-algebraic form; Then, this matrix algebraic equation is solved to determine the time-varying parameters of bilinear systems; Finally the simulated example is given and shows that identification results using the method in this paper are accurate enough.

Key words: system identification; bilinear system; Legendre polynomials

本文作者简介

王秀峰 1941年生. 1960年考入南开大学数学系, 1965年毕业后留校任教. 现为南开大学计算机与系统科学系副教授. 自1971年以来, 从事控制理论与应用研究工作. 主要涉及系统辨识, 自适应控制, 离散事件动态系统领域.

李 波 女. 1967年生. 1985年考入南开大学数学系, 1989年毕业后直接考入本校计算机与系统科学系读硕士研究生. 现为天津大学管理工程系教师. 研究生学习期间, 主要方向是控制理论与应用方面的研究, 涉及系统辨识, 自适应控制和智能管理.