第 9 卷第 5 期
1992 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 5
Oct., 1992

# 线性系统的分散输出反馈特征结构配置

段广仁　强文义

(哈尔滨工业大学控制工程系,150006)

**摘要**：本文考虑了利用分散输出反馈配置多通道线性系统特征结构的问题；建立了闭环特征向量矩阵容许集及分散反馈增益集合关于闭环特征值和四组参向量的两种参量表示.

**关键词**：线性系统；分散输出反馈；特征结构配置

## 1　问题的描述

单通道线性系统的特征结构配置问题[1~6]和多通道线性系统的分散状态反馈特征结构配置问题[7]，已得到一定的讨论. 本文讨论利用分散输出反馈配置多通道线性系统特征结构的问题.

设 $a_i, q_i, p_{ij}, j=1,2,\cdots,q_i, i=1,2,\cdots,n'$ 为满足下述关系的一组正整数

$$\sum_{j=1}^{q_i} p_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{n'} a_i = n. \tag{1.1}$$

其中 $n$ 与 $n'$ $(n'\leqslant n)$ 亦为正整数. 为了下文叙述方便，首先引入两点约定：

1) 任何一个向量组 $x_{ij}^k, k=1,2,\cdots,p_{ij}; j=1,2,\cdots,q_i; i=1,2,\cdots,n'$ 可简记为 $\{x_{ij}^k\}$.

2) 对于任何一组向量 $\{x_{ij}^k\}$，可按下述方式定义与其一一对应的矩阵 $X$：

$$X = [X_1\ X_2\ \cdots\ X_{n'}],$$
$$X_i = [X_{i1}\ X_{i2}\ \cdots\ X_{iq_i}],$$
$$X_{ij} = [x_{ij}^1\ x_{ij}^2\ \cdots\ x_{ij}^{p_{ij}}].$$

**注**　下文中出现的矩阵 $V, T, W, Z, W_\gamma, Z_\gamma$ 均是与向量组 $\{v_{ij}^k\}, \{t_{ij}^k\}, \{w_{ij}^k\}, \{z_{ij}^k\}, \{w_{\gamma_{ij}}^k\}, \{z_{\gamma_{ij}}^k\}$ 一一对应的，而不再另行说明.

本文所考虑的多通道线性系统的分散输出反馈特征结构配置问题可以表述如下.

已知矩阵 $A\in R^{n\times n}, B_i\in R^{n\times r_i}, C_i\in R^{m_i\times n}$ $(r_i, m_i\leqslant n)$，且 $\mathrm{rank}(B_i)=r_i, \mathrm{rank}(C_i)=m_i, i=1,2,\cdots,N$，这里 $N$ 为某一正整数；再给定集合 $\Gamma=\{s_i | s_i\in C, i=1,2,\cdots,n', 1\leqslant n'\leqslant n\}$ 及一组满足(1.1)式的正整数 $a_i, q_i, p_{ij}, j=1,2,\cdots,q_i, i=1,2,\cdots,n'$，且 $\Gamma$ 关于实轴对称. 求取矩阵 $K_i\in R^{r_i\times m_i}, i=1,2,\cdots,N$ 及 $C^n$ 中的向量组 $\{v_{ij}^k\}$ 及 $\{t_{ij}^k\}$ 使得下述各式成立：

$$[A+\sum_{\gamma=1}^{N} B_\gamma K_\gamma C_\gamma - s_i I]v_{ij}^k = v_{ij}^{k-1}, \quad v_{ij}^0 = 0, \tag{1.2}$$

$$[A+\sum_{\gamma=1}^{N} B_\gamma K_\gamma C_\gamma - s_i I]^{\mathrm{T}} t_{ij}^k = t_{ij}^{k+1}, \quad t_{ij}^{p_{ij}+1} = 0, \tag{1.3}$$

$$T^{\mathrm{T}} V = I. \tag{1.4}$$

本文于1990年10月23日收到. 1992年4月28日收至修改稿.

这里 $k=1,2,\cdots,p_{ij}$, $j=1,2,\cdots,q_i$, $i=1,2,\cdots,n'$.

如果记

$$E=\{(T,V,K)\,|\,K=\mathrm{diag}(K_1\ K_2\ \cdots\ K_N),K_i\in R^{r_i\times m_i},$$
$$T,V\in C^{n\times n}\ \text{满足}(1.2)\sim(1.4)\text{式}\},$$
$$E_1=\{K\,|\,(T,V,K)\in E\},$$
$$E_2=\{(T,V)\,|\,(T,V,K)\in E\},$$

则上述特征结构配置问题等价于确定集合 $E,E_1$ 及 $E_2$,或其中的某一元素.

## 2 基本结果

记

$$B=[B_1\ B_2\ \cdots\ B_N]\in R^{n\times r},\quad r=\sum_{i=1}^N r_i,$$

$$C^{\mathrm T}=[C_1^{\mathrm T}\ C_2^{\mathrm T}\ \cdots\ C_N^{\mathrm T}]\in R^{n\times m},\quad m=\sum_{i=1}^N m_i.$$

以 $J$ 记矩阵 $A+\sum_{j=1}^N B_jK_jC_j$ 的若当标准型,并引入关系式

$$AV+BW=VJ, \tag{2.1}$$
$$T^{\mathrm T}A+Z^{\mathrm T}C=JT^{\mathrm T}, \tag{2.2}$$
$$W^{\mathrm T}=[W_1^{\mathrm T}\ \cdots\ W_N^{\mathrm T}],\quad Z^{\mathrm T}=[Z_1^{\mathrm T}\ \cdots\ Z_N^{\mathrm T}], \tag{2.3}$$
$$W_i=K_iC_iV,\quad Z_i^{\mathrm T}=T^{\mathrm T}B_iK_i, \tag{2.4}$$
$$T^{\mathrm T}B_iW_i=Z_i^{\mathrm T}C_iV, \tag{2.5}$$
$$K_i=W_i(C_iV)^{\mathrm T}[(C_iV)(C_iV)^{\mathrm T}]^{-1}, \tag{2.6}$$
$$K_i=[(T^{\mathrm T}B_i)^{\mathrm T}(T^{\mathrm T}B_i)]^{-1}(T^{\mathrm T}B_i)^{\mathrm T}Z_i^{\mathrm T}, \tag{2.7}$$
$$i=1,2,\cdots,N$$

及下述集合

$$U_0=\{(V,W,T,Z)\,|\,\text{满足}(2.1),(2.2)\text{及}(1.4)\text{式},$$
$$\text{且当}\ s_i=\bar s_l\ \text{时有}\ v_{ij}^k=\bar v_{lj}^k,t_{ij}^k=\bar t_{lj}^k\},$$
$$U=\{(V,W,T,Z)\,|\,(V,W,T,Z)\in U_0,\text{且}(2.5)\text{式满足}\},$$
$$U_1=\{(V,W)\,|\,\text{满足}(2.1)\text{及}\det V\neq 0,$$
$$\text{且当}\ s_i=\bar s_l\ \text{时有}\ v_{ij}^k=\bar v_{lj}^k\},$$
$$U_2=\{(T,Z)\,|\,\text{满足}(2.2)\text{及}\det T\neq 0,$$
$$\text{且当}\ s_i=\bar s_l\ \text{时有}\ t_{ij}^k=\bar t_{lj}^k\},$$
$$\widetilde E_1=\{K\,|\,\text{由}(2.3)\text{和}(2.4)\text{式决定},(V,W,T,Z)\in U_0\},$$
$$E_1^0=\{K\,|\,\text{由}(2.6)\text{和}(2.7)\text{式给出},(V,W,T,Z)\in U\},$$

则我们有下述定理及推论.

**定理 1**

1) $E_1=\widetilde E_1=E_1^0$,

2) $E_2=\{(T,V)\,|\,(V,W,T,Z)\in U\}$.

**推论 1** 设 $N=1$,则

1) $E_1=\{K\,|\,$由(2.6)和(2.7)式给出，$(V,W,T,Z)\in U_0\}$，

2) $E_2=\{(T,V)\,|\,(V,W,T,Z)\in U_0\}$.

**推论 2** 设 $C_i=C_0\in R^{n\times n}, i=1,2,\cdots,N, \det C_0\neq 0$，则

1) $E_1=\{K\,|\,K_i=W_i(C_0V)^{-1},(V,W)\in U_1\}$，

2) $E_2=\{(T,V)\,|\,(V,W)\in U_1, T=V^{-T}\}$.

**推论 3** 设 $B_i=B_0\in R^{n\times n}, i=1,2,\cdots,N, \det B_0\neq 0$，则

1) $E_1=\{K\,|\,K_i=(T^{T}B_0)^{-1}Z_i^{T},(T,Z)\in U_2\}$，

2) $E_2=\{(T,V)\,|\,(T,Z)\in U_2, V=T^{-T}\}$.

## 3 集合 $U$ 及 $U_i, i=0,1,2$ 的求取

引入下述集合

$$F=\{\{f_{ij}^k\}\,|\,f_{ij}^k\in C^r, \text{且当 } s_i=\bar{s}_i \text{ 时有 } f_{ij}^k=\bar{f}_{ij}^k\},$$
$$G=\{\{g_{ij}^k\}\,|\,g_{ij}^k\in C^m, \text{且当 } s_i=\bar{s}_i \text{ 时有 } g_{ij}^k=\bar{g}_{ij}^k\}.$$

### 3.1 方法 I

当$[A\ B]$能控、$[A\ C]$能观时，存在么模阵 $P_i(s)$和 $Q_i(s), i=1,2$ 使得下述两式成立

$$P_1(s)[A-sI\quad B]Q_1(s)=[0\quad I], \tag{3.1}$$
$$P_2(s)[A^{T}-sI\quad C^{T}]Q_2(s)=[0\quad I]. \tag{3.2}$$

引入向量

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix}=Q_1(s_i)\begin{bmatrix} f_{ij}^k \\ P_1(s_i)v_{ij}^{k-1} \end{bmatrix},\quad v_{ij}^0=0, \tag{3.3}$$
$$\begin{bmatrix} t_{ij}^k \\ z_{ij}^k \end{bmatrix}=Q_2(s_i)\begin{bmatrix} g_{ij}^k \\ P_2(s_i)t_{ij}^{k+1} \end{bmatrix},\quad t_{ij}^{p_{ij}+1}=0, \tag{3.4}$$

并定义下述集合

$$U_0'=\{(V,W,T,Z)\,|\,\text{满足(3.3)},(3.4)\text{ 及(1.4) 式，其中}\{f_{ij}^k\}\in F,\{g_{ij}^k\}\in G\},$$
$$U_1'=\{(V,W)\,|\,\text{满足(3.3) 式及 }\det V\neq 0,\{f_{ij}^k\}\in F\},$$
$$U_2'=\{(T,Z)\,|\,\text{满足(3.4) 式及 }\det T\neq 0,\{g_{ij}^k\}\in G\},$$
$$U'=\{(V,W,T,Z)\,|\,(V,W,T,Z)\in U_0'\text{ 且满足(2.5) 式}\},$$

则下述定理成立.

**定理 2** 设$[A\ B]$能控、$[A\ C]$能观，则有

$$U'=U,\quad U_i'=U_i,\quad i=0,1,2.$$

### 3.2 方法 II

当$[A\ B]$能控、$[A\ C]$能观时，有

$$(sI-A)^{-1}B=N_1(s)D_1^{-1}(s), \tag{3.5}$$
$$(sI-A^{T})^{-1}C^{T}=N_2(s)D_2^{-1}(s). \tag{3.6}$$

其中 $N_i(s)$与 $D_i(s)$为相互右素的多项式矩阵.

引入向量

$$\begin{bmatrix} v_{ij}^k \\ w_{ij}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} N_1(s_i) \\ D_1(s_i) \end{bmatrix}f_{ij}^k+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}\begin{bmatrix} N_1(s_i) \\ D_1(s_i) \end{bmatrix}f_{ij}^1, \tag{3.7}$$

$$\begin{bmatrix} t_{ij}^{p_{ij}-k+1} \\ z_{ij}^{p_{ij}-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2(s_i) \\ D_2(s_i) \end{bmatrix} g_{ij}^k + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}} \begin{bmatrix} N_2(s_i) \\ D_2(s_i) \end{bmatrix} g_{ij}^1, \tag{3.8}$$

$$k = 1,2,\cdots,p_{ij}; \quad j = 1,2,\cdots,q_i; \quad i = 1,2,\cdots,n'.$$

并定义下述集合

$$U_0^* = \{(V,W,T,Z) \mid \text{满足(3.7),(3.8)及(1.4)式,}$$
$$\text{其中}\{f_{ij}^k\} \in F, \{g_{ij}^k\} \in G\},$$
$$U_1^* = \{(V,W) \mid \text{满足(3.7)式及} \det V \neq 0, \{f_{ij}^k\} \in F\},$$
$$U_2^* = \{(T,Z) \mid \text{满足(3.8)式及} \det T \neq 0, \{g_{ij}^k\} \in G\},$$
$$U^* = \{(V,W,T,Z) \mid (V,W,T,Z) \in U_0^*, \text{且满足(2.5)式}\},$$

则下述定理成立.

**定理 3** 设$[A\ B]$能控、$[A\ C]$能观,则有

$$U^* = U, \quad U_i^* = U_i, \quad i = 0,1,2.$$

**说明** 定理 2 和定理 3 可利用[1,3,7]中结果证明.满足(3.1)和(3.2)式的么模阵$P_i(s)$和$Q_i(s)$,$i=1,2$可以利用矩阵初等变换得到;(3.5)和(3.6)式可基于(3.1)和(3.2)式获取(参见[1~3]或[6~7]).

## 4 定理 1 的证明

记

$$\tilde{U} = \{(V,W,T,Z) \mid (V,W,T,Z) \in U_0, \text{且存在} K_i \in R^{r_i \times m_i} \text{使(2.4)式成立}\},$$

则有

**引理 1**

1) $E=\{(T,V,K) \mid K \in \tilde{E}_1, (V,W,T,Z) \in \tilde{U}\}$,

2) $E_1=\tilde{E}_1$; $E_2=\{(T,V) \mid (V,W,T,Z) \in \tilde{U}\}$.

**证** 只要注意到(1.2),(1.3)式与(2.1)~(2.4)式的等价性及矩阵广义特征向量链的性质[1]即可.

**引理 2** $E_1^0=\tilde{E}_1$

**证** $\forall K \in E_1^0$,则有(2.6),(2.7)及(2.5)式成立,且$(V,W,T,Z) \in U_0$.从而由$U_0$的性质可知$K$为实的.另外由(2.5)和(2.6)式很容易推得

$$T^{\mathrm{T}} B_i K_i = Z_i^{\mathrm{T}}.$$

再以上式代入(2.5)式易得

$$B_i(W_i - K_i C_i V) = 0.$$

由$B_i$的满秩性质及$r_i \leqslant n$又可得

$$W_i = K_i C_i V.$$

因而由(2.6)式给出的$K_i$阵满足(2.3)和(2.4)式.完全类似地可以证明由(2.7)式给出的$K_i$亦满足(2.3)和(2.4)式,从而有$E_1^0 \subset \tilde{E}_1$.

$\forall K \in \tilde{E}_1$,则(2.1)~(2.4)及(1.4)式成立.于(2.1)式两端右乘$T^{\mathrm{T}}$,于(2.2)式两端左乘$V$,并将所得的两式相减,可得(2.5)式.另外由(2.4)式易得(2.6)和(2.7)式,从而有$\tilde{E}_1 \subset E_1^0$.

**引理 3** $\tilde{U}=U$

证　由引理 2 的证明过程显见.

综合上述三个引理，定理 1 得证.

## 参 考 文 献

[1] 段广仁，吴广玉，黄文虎. 时变线性系统的特征结构配置问题. 中国科学(A 辑)，1990，7：769—784

[2] 段广仁等. 线性系统的状态反馈特征结构配置. 自动化学报，1990，16(6)：566—568

[3] Guang-Ren Duan. Solutions to Matrix Equation $AV+BW=VF$ and Their Application to Eigenstructure Assignment in Linear Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(11)

[4] Kwon, B. H. and Youn, M. J.. Eigensvalue-Generalized Eigenvector Assignment by Output Feedback, IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, AC-32(5): 417—421

[5] Fahmy, M. M. and O'Reilly, J.. Parametric Eigenstructure Assignment by Output Feedback Control: the Case of Multiple Eigenvalues. Int. J. Contr., 1988, 48(4): 1519—1535

[6] Guang-Ren Duan. Solution to Matrix Equation $AV+BW=EVF$ and Eigenstructure Assignment for Descriptor Systems, Automatica, 1992, 28(3): 639—643

[7] Duan Guangren. Eigenstructure Assignment in Multivariable Linear Systems via Decentralized State Feedback. Proceeding of Euorpean Control Conference (ECC'91), Juillet France, July, 1991, 2530—2533

# Eigenstructure Assignment for Linear Systems via Decentralized Output Feedback

DUAN Guangren　and　QIANG Wenyi

(Department of Control Engineering, Haerbin Institute of Technology · Haerbin, 150006, PRC)

**Abstract**: In this paper, the problem of eigenstructure assignment formultivariable linear systems via decentralized output feedback is considered, two parametric expressions for the set of the closed loop eigenvectormatrices and the set of the output feedback gains, with respect to theclosed loop eigenvalues and four groups of parametric vectors areestablished.

**Key words**: linear systems; decentralized output feedback; eigenstucture assignment

## 本文作者简介

**段广仁**　1962 年生. 分别于 1983 年 9 月、1986 年 9 月和 1989 年 9 月获得应用数学专业学士学位、现代控制理论专业硕士学位和一般力学专业博士学位. 于 1991 年 8 月结束博士后科研工作. 现为哈尔滨工业大学控制理论与应用教研室教授. 硕士生导师. 目前的主要研究方向是线性系统的结构性理论和鲁棒控制系统设计方法.

**强文义**　1937 年生. 现为哈尔滨工业大学控制工程系教授. 长期从事自动控制理论和自动控制系统设计的研究工作. 目前的研究工作侧重于线性系统理论武备随动系统，航天器控制和机器人控制.