第 9 卷第 6 期
1992 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 6
Dec., 1992

利用动态补偿器配置线性系统特征结构的参数方法

段广仁　冯汝鹏　强文义
(哈尔滨工业大学控制工程系，150006)

摘要：本文在文[5,6]的基础上建立了带有动态补偿器的线性多变量控制系统的特征结构配置问题所有解的统一参量表示，并在此基础上给出了使得闭环系统具有希望特征结构的最小阶动态补偿器设计算法.

关键词：线性系统；特征结构；动态补偿器；输出反馈

1 引　言

关于线性系统的特征结构配置问题，现已有许多结果[1~6]. 不同于文[1～4]，本文在[5,6]的基础上给出了利用动态补偿器配置线性系统闭环特征结构的一种参数方法，建立了系统闭环特征向量及补偿器参数矩阵关于闭环极点和四组参向量的参量表示. 克服了文[1,3,4]中要求闭环结构非亏损这一限制，并给出了使系统具有希望闭环结构的最小阶动态补偿器设计算法.

2 问题的描述

对于下述线性系统
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \tag{2.1}$$
其中 $x\in R^n, u\in R^r, y\in R^m$；$A,B,C$ 为适当阶的实矩阵，且 B,C 满秩. 选取下述动态补偿器
$$\dot{\xi} = K_{22}\xi + K_{21}y, \quad u = K_{11}y + K_{12}\xi. \tag{2.2}$$
其中 $\xi\in R^p$，$K_{ij}, i,j=1,2$ 为适当阶的实矩阵，则得闭环系统如下
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = A_C\begin{bmatrix}x\\ \xi\end{bmatrix}, \quad A_C = \begin{bmatrix}A+BK_{11}C & BK_{12}\\ K_{21}C & K_{22}\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$
记 A_C 的若当标准形为 J，记其左、右特征向量矩阵分别为 T 和 V，则有下式成立
$$T^{\mathrm{T}}A_CV = J, \quad T^{\mathrm{T}}V = I. \tag{2.4}$$
系统(2.1)在动态补偿器(2.2)下的闭环特征结构配置问题可以表述如下：

问题 ESA　给定系统(2.1)及任意指定的若当矩阵 $J\in C^{(n+p)\times(n+p)}$，$\lambda(J)$ 满足复封闭条件，寻求所有使得(2.4)式成立的实阵 $K_{i,j}, i,j=1,2$ 及复阵 T 和 V.

3 预备工作

记
$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}. \tag{3.1}$$
则由(2.3)式可得
$$A_C = \widetilde{A} + \widetilde{B}K\widetilde{C}, \quad K = \begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

本文于 1991 年 1 月 19 日收到. 1991 年 6 月 4 日收到修改稿.

从而下述引理成立.

引理 1　系统(2.1)在动态补偿器(2.2)下的闭环特征结构配置问题等价于下述系统

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}, \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \tag{3.3}$$

在输出反馈律 $\tilde{u} = K\tilde{y}$ 下的闭环特征结构配置问题.

设系统(2.1)能控、能观,则存在右互素的多项式矩阵 $N(s) \in R^{n\times r}$ 和 $D(s) \in R^{r\times r}$, $H(s) \in R^{n\times m}$ 和 $L(s) \in R^{m\times m}$ 满足下述矩阵右有理既约分解

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)D^{-1}(s), \quad (sI - A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}} = H(s)L^{-1}(s). \tag{3.4}$$

现令

$$\tilde{N}(s) = \begin{bmatrix} 0 & N(s) \\ I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} 0 & D(s) \\ sI_p & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\tilde{H}(s) = \begin{bmatrix} 0 & H(s) \\ I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}(s) = \begin{bmatrix} 0 & L(s) \\ sI_p & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

则容易证得下述引理.

引理 2　设$[A \quad B \quad C]$能控、能观,则由(3.4)～(3.6)式决定的多项式矩阵 $\tilde{N}, \tilde{D}, \tilde{H}$ 及 $\tilde{L}$ 满足下述矩阵右有理既约分解

$$(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{N}(s)\tilde{D}(s), \quad (sI - \tilde{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\tilde{C}^{\mathrm{T}} = \tilde{H}(s)\tilde{L}^{-1}(s). \tag{3.7}$$

4　主要结果

设矩阵 J 共包含 $n'(1 \leqslant n' \leqslant n+p)$ 个若当子块,并记其第 i 个子块的阶数及其特征值分别为 p_i 和 s_i. 这里 $s_i, i=1,2,\cdots,n'$ 可以相重. 下面约定,对于任何一个具有 $n+p$ 个列的矩阵 X,都如下排列其列的序号

$$X = [x_1^1 \cdots x_1^{p_1}\ x_2^1 \cdots x_2^{p_2} \cdots\cdots x_{n'}^1 \cdots x_{n'}^{p_{n'}}] \triangleq [x_i^k]. \tag{4.1}$$

引入参数矩阵 $F_0 = [f_{0i}^k] \in C^{r\times(n+p)}$, $G_0 = [g_{0i}^k] \in C^{m\times(n+p)}$ 及 $F_1 = [f_{1i}^k]$ 和 $G_1 = [g_{1i}^k] \in C^{p\times(n+p)}$,并由它们按下述方式定义矩阵 $V_0 = [v_{0i}^k]$, $W_0 = [w_{0i}^k]$, $T_0 = [t_{0i}^k]$ 及 $Z_0 = [z_{0i}^k]$:

$$\begin{bmatrix} v_{0i}^k \\ w_{0i}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{0i}^k + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_{0i}^1, \tag{4.2a}$$

$$\begin{bmatrix} t_{0i}^{p_i-k+1} \\ z_{0i}^{p_i-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(s_i) \\ L(s_i) \end{bmatrix} g_{0i}^k + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\begin{bmatrix} H(s_i) \\ L(s_i) \end{bmatrix} g_{0i}^1, \tag{4.2b}$$

$$k = 1,2,\cdots,p_i; \quad i = 1,2,\cdots,n'.$$

则下述定理成立.

定理　设系统(2.1)能控、能观,则

1) 问题 ESA 有解的充要条件是存在参数 $F_i, G_i, i=0,1$ 使得下述约束满足:

C_1: 当 $s_i = \bar{s}_l$ 时有 $f_{ji}^k = \bar{f}_{jl}^k$, $g_{ji}^k = \bar{g}_{jl}^k$, $j=0,1$.　C_2: $T_0^{\mathrm{T}}V_0 + G_1^{\mathrm{T}}F_1 = I$.

2) 当上述条件满足时,问题 ESA 的解由下述公式给出:

$$V = [V_0^{\mathrm{T}} \quad F_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad T = [T_0^{\mathrm{T}} \quad G_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \tag{4.3}$$

$$K_{11} = W_0 G, \quad K_{12} = (W_0 - K_{11}CV_0)\Phi, \tag{4.4a}$$

$$K_{21} = F_1 JG, \quad K_{22} = (F_1 J - K_{21}CV_0)\Phi. \tag{4.4b}$$

其中 $\Phi = F_1^{\mathrm{T}}(F_1F_1^{\mathrm{T}})^{-1}$, $G = \Psi(CV_0\Psi)^{-1}$, $\Psi = (I - \Phi F_1)(CV_0)^{\mathrm{T}}$.

上述定理可利用引理 1,引理 2,文[5]中的定理 3 及矩阵求逆引理证之. 限于篇幅,这

里略去证明.下面关于定理作几点说明:

i) 对应文[5]的(3.6)式,还可得到由 T_0,Z_0 及 B 表达的另一组求补偿器系数的公式.

ii) 约束 C_2 保证了矩阵 Φ 及 G 的表达式中逆矩阵的存在性.

iii) 当 J 为对角阵时,约束 C_2 化为

$$g_{0i}^T H^T(s_i)N(s_j)f_{0j} + g_{1i}^T f_{1j} = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n+p.$$

5 算 法

基于上节的定理,可获得下述求解能控、能观系统(2.1)的特征结构配置问题的算法:

1) 求取右既约分解式(3.4),并置 $p=0$.

2) 选取矩阵 J,并求取 T_0,V_0 的表达式.

3) 求取满足约束 C_1 和 C_2 的一组参数 F_i 和 G_i,$i=0,1$.如果这样的参数不存在,置 $p=p+1$ 后转第2步.

4) 基于上一步中求得的参数利用公式(4.2)~(4.4)求取 V,T 及 K_{ij},$i,j=1,2$.

下面对算法作几点说明:

i) 算法第1步可利用矩阵初等变换非常方便的完成(参见文献[5~8]).

ii) 当 n 较大时,算法第三步可通过极小化 $\| T_0^T V_0 + G_0^T F_1 - I \|_F$ 来完成.

iii) 当满足约束 C_1,C_2 的参数不唯一时,可用多余的自由度来考虑其它一些问题[7,8].

iv) 由于定理已经给出了问题ESA的所有解,故由上述算法给出的补偿器是使系统具有希望闭环结构的最小阶补偿器.

参 考 文 献

[1] Sambandan, A. and Chanrraasekharan, P. C.. Eigenvector Assignment by Output Feedback. Int. J. Control, 1981, 34(6):1143—1152

[2] Han, Z. Z.. Eigenstructure Assignment Using Dynamical Compensator. Int. J. Control, 1989, 49(1):233—245

[3] 程鹏.配置特征结构的动态补偿器设计.自动化学报,1985,11(4):364—371

[4] 程鹏.配置特征结构的n-1阶补偿器设计.控制理论与应用,1987,4(4):17—24

[5] 段广仁,吴广玉,黄文虎.时变线性系统的特征结构配置问题.中国科学(A辑),1990,(7):769—776

[6] 段广仁等.线性系统的状态反馈特征结构配置.自动化学报,1990,16(6):566—568

[7] 段广仁.具有干扰解耦功能的特征结构配置.控制与决策,1990,(4):13—18

[8] 段广仁等.线性系统的鲁棒状态反馈控制器.信息与控制,1990,9(1):31—34

A Parametric Approach to Eigenstructure Assignment for Linear Systems via Dynamical Compensators

DUAN Guangren, FENG Rupeng and QIANG Wenyi

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150006, PRC)

Abstract: Based on the results in [5,6], the unified parametric representations for all the solutions to the problem of eigenstructure assignment in multivariable control systems with dynamical compensators are established, a designing algorithm for the minimum order dynamical compensator which guarantees the desired closed loop eigenstructure is also presented.

Key words: Linear systems; eigenstructure assignment; dynamical compensators; output feedback

本文作者简介

段广仁 见本刊1992年第5期第559页

冯汝鹏 1938年生.现任哈尔滨工业大学教授.主要研究方向为线性系统理论,随机最优控制和机器人控制等.

强文义 见1992年第5期第559页.