第 9 卷第 6 期
1992 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 9, No. 6
Dec., 1992

一种基于 H_∞ 范数最优模型匹配的自适应控制算法*

慕春棣　胡庆勇　吴旭东
(清华大学自动化系·北京,100084)

摘要：基于 H_∞ 范数最小理论的最优模型匹配自适应控制器保证闭环系统与参考模型之间的误差传递函数在 H_∞ 范数意义下最小. 这种自适应控制器可以保证闭环系统稳定(BIBO 稳定),而不管被控对象是否稳定,是否是最小相位.

关键词：自适应控制；最优模型匹配；H_∞ 范数

1　问题的提出

考虑图 1 所示的最优模型匹配自适应控制系统框图,被控对象为单输入单输出离散时不变系统

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-p). \tag{1}$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \cdots + a_nq^{-n}(a_n \neq 0),$$
$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \cdots + b_mq^{-m}(b_0 \neq 0, b_m \neq 0).$$

q^{-1} 表示时间向后平移算子,$q^{-1}y(k)=y(k-1)$,p 表示控制对输出的传输延迟($p\geqslant 1$). $u(k)$ 表示对象输入,$y(k)$ 表示对象输出,$A(q^{-1})$ 与 $B(q^{-1})$ 互质,参数 a_i, b_j($1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant j\leqslant m$)是任意的未知参数,对象可以是稳定的或不稳定的,最小相位的或非最小相位的.

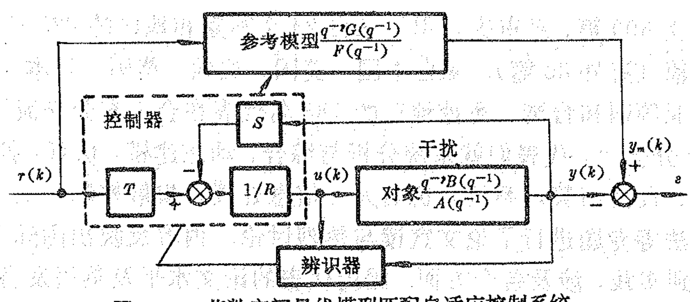

图 1　H_∞ 范数空间最优模型匹配自适应控制系统

虚线框内的控制器可表示为

$$R(q^{-1})u(k) = -S(q^{-1})y(k) + T(q^{-1})r(k). \tag{2}$$

其中 $r(k)$ 为外界参考输入(如单位阶跃信号). $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ 就是所要求的自适应控制器.

稳定的参考模型传递函数为

---

* 国家自然科学基金会资助项目.
本文于 1991 年 3 月 15 日收到. 1991 年 12 月 5 日收到修改稿.

$$M(q^{-1}) = \frac{q^{-p}G(q^{-1})}{F(q^{-1})}. \tag{3}$$

其中

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2} + \cdots + g_dq^{-d},$$
$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \cdots + f_lq^{-l}(d \leqslant l \leqslant p + n).$$

$r(k)$和 $y(k)$之间的闭环传递函数为

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-p}B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}. \tag{4}$$

要求设计 $R(q^{-1})$,$T(q^{-1})$和 $S(q^{-1})$,使下面定义在 H∞范数空间的性能指标最小.

$$J = \| E(q^{-1}) \|_\infty = \| M(q^{-1}) - H(q^{-1}) \|_\infty .$$

其中 $\| E(q^{-1}) \|_\infty = \mathrm{ess.\,sup}|E(e^{-j\theta})|, \theta \in [0, 2\pi]$[*].

使 J 最小就是使对象的输出 $y(k)$最优跟踪稳定参考模型的输出 $y_m(k)$,且闭环系统稳定.

2　使 H∞范数最小的最优模型匹配自适应控制器的设计

2.1　未知对象的参数辨识[*]

设对象有输入输出数据是可以直接量测的,考虑到模型残差和量测噪声,(1)式可写成

$$y(k) = \varphi^{\mathrm{T}}(k-1)\theta + e(k). \tag{5}$$

其中

$$\varphi^{\mathrm{T}}(k-1) = [y(k-1), \cdots, y(k-n); u(k-n), u(k-p-1), \cdots, u(k-p-m)],$$
$$\theta^{\mathrm{T}} = [-a_1, \cdots, -a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m].$$

假设 $e(k)$是零均值,平稳随机序列,且 $e(k)$与 y,φ 不相关,则可采用递推的最小二乘辨识进行参数估计:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + Q(k-1)\varphi(k-1)e(k) \quad k \geqslant 1, \tag{6}$$
$$e(k) = y(k) - \varphi^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\theta}(k-1), \tag{7}$$
$$Q(k-1) = [Q(k-2) - Q(k-2)\varphi(k-1)D^{-1}(k-1)\varphi^{\mathrm{T}}(k-1)Q(k-2)]/\lambda, \tag{8}$$
$$D(k-1) = \lambda + \varphi^{\mathrm{T}}(k-1)Q(k-2)\varphi(k-1). \tag{9}$$

$\lambda(0<\lambda<1)$是遗忘因子,一般取 λ 在 0.9 到 0.99 之间.辨识初值 $\hat{\theta}(0)$和 $Q(-1)=NI(N\gg1, I$ 单位阵)为给定值.

2.2　自适应控制器 $R(q^{-1})$,$S(q^{-1})$和 $T(q^{-1})$的求解(不完全模型匹配)

首先将辨识所得的 $B(q^{-1})$进行分解

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}). \tag{10}$$

其中 $B^+(q^{-1})$的所有零点在单位圆内$|q|<1$,$B^-(q^{-1})$的所有零点在单位圆外$|q|\geqslant1$.为保证分解的唯一性,令 $B^+(q^{-1})$为首一多项式.

$$J = \| E(q^{-1}) \|_\infty = \| M(q^{-1}) - H(q^{-1}) \|_\infty$$
$$= \left\| q^{-p}\left[\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} - \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}\right]\right\|_\infty. \tag{11}$$

令

$$q^{-p} = Z(q^{-1}). \tag{12}$$

$$\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}-\frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}=L(q^{-1}),\tag{13}$$

则
$$J=\|Z(q^{-1})L(q^{-1})\|_\infty.\tag{14}$$

$Z(q^{-1})$是H_∞范数空间的内函数，由内函数的保范性[*]，(14)简化为

$$\begin{aligned}J&=\|Z(q^{-1})L(q^{-1})\|_\infty=\|L(q^{-1})\|_\infty\\&=\left\|\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}-B^-(q^{-1})\frac{B^+(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}\right\|_\infty.\end{aligned}\tag{15}$$

这里 $P(q^{-1})=\dfrac{B^+(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}$为稳定的有理函数.

令 $v=\deg(B^-(q^{-1}))$表示 $B^-(q^{-1})$的零点数目，$b_i(1\leqslant i\leqslant v)$是 $B^-(q^{-1})$的不同零点，则有

$$E(b_i)=L(b_i)=\frac{G(b_i)}{F(b_i)},\quad(1\leqslant i\leqslant v).\tag{16}$$

使 J 最小化的问题也就转化为H_∞范数最优内插问题[*]，令

$$\|E^*(q^{-1})\|_\infty=\min\|E(q^{-1})\|_\infty,$$

则
$$E^*(q^{-1})=\begin{cases}\rho\dfrac{\bar h(q^{-1})}{h(q^{-1})}, & v\geqslant 1.\\ 0, & v=0.\end{cases}\tag{17}$$

其中 $h(q^{-1})=1+h_1q^{-1}+\cdots+h_{v-1}q^{-(v-1)}$为严格 Hurwitz 多项式，而

$$\bar h(q^{-1})=q^{-(v-1)}h(q).$$

ρ 和 $h_j(1\leqslant j\leqslant v-1)$是实数，由(16)式唯一确定，且

$$\min\|E(q^{-1})\|_\infty=\|E^*(q^{-1})\|_\infty=|\rho|^{[*]}.\tag{18}$$

在不完全模型匹配条件下，$G(q^{-1})$中不会具有 $B^-(q^{-1})$，由(15)式和(17)式，得$\|E(q^{-1})\|_\infty$的最小解为

$$E^*(q^{-1})=\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}-B^-(q^{-1})P^*(q^{-1})=\rho\frac{\bar h(q^{-1})}{h(q^{-1})}.$$

则
$$P^*(q^{-1})=\frac{G(q^{-1})h(q^{-1})-\rho F(q^{-1})\bar h(q^{-1})}{F(q^{-1})h(q^{-1})B^-(q^{-1})}.\tag{19}$$

$P^*(q^{-1})$表示与使$\|E(q^{-1})\|_\infty$最小的解 $E^*(q^{-1})$相应的稳定有理函数，则 $B^-(q^{-1})$必为 $G(q^{-1})h(q^{-1})-\rho F(q^{-1})\bar h(q^{-1})$的一个因子，存在多项式 $V(q^{-1})=v_0+v_1q^{-1}+\cdots+v_{l-1}q^{-(l-1)}$满足

$$G(q^{-1})h(q^{-1})-\rho F(q^{-1})\bar h(q^{-1})=B^-(q^{-1})V(q^{-1}).\tag{20}$$

由于
$$B^-(b_i)=0,\quad(i=1,\cdots,v),$$

则
$$G(b_i)h(b_i)-\rho F(b_i)\bar h(b_i)=0.\tag{21}$$

(21)式中包含 v 个方程，解 v 个未知数 $\rho,h_1,h_2,\cdots,h_{v-1}$，得 $\rho,h(q^{-1})$和 $\bar h(q^{-1})$，代入式(20)，由待定系数法，可得 $V(q^{-1})$.

将(20)式代入(19)式，得

$$P^*(q^{-1})=\frac{V(q^{-1})}{F(q^{-1})h(q^{-1})}.\tag{22}$$

比较(22)式和 $P(q^{-1})=\dfrac{B^+(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}$，得

$$\frac{T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}=\frac{V(q^{-1})}{B^{+}(q^{-1})F(q^{-1})h(q^{-1})},\tag{23}$$

则

$$A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})=B^{+}(q^{-1})F(q^{-1})h(q^{-1})X(q^{-1}).\tag{24}$$

而

$$T(q^{-1})=V(q^{-1})X(q^{-1}),\tag{25}$$

其中 $X(q^{-1})$ 为非零任意严格 Hurwitz 多项式，为了使(24)式有解，$X(q^{-1})$ 的阶次限制为 $\deg(X(q^{-1}))\leqslant p+n-1$.

令

$$R(q^{-1})=R^{1}(q^{-1})B^{+}(q^{-1}).\tag{26}$$

其中

$$R^{1}(q^{-1})=1+r_1^1q^{-1}+\cdots+r_{p+v-1}^{1}q^{-(p+v-1)},$$

则(24)式变为

$$A(q^{-1})R^{1}(q^{-1})+q^{-p}B^{-}(q^{-1})S(q^{-1})=F(q^{-1})h(q^{-1})X(q^{-1}).\tag{27}$$

这里取 $S(q^{-1})=s_0+s_1q^{-1}+\cdots+s_{n-1}q^{-(n-1)}$. 由于 $A(q^{-1})B^{-}(q^{-1})$ 互质，当 $1\leqslant n+p$ 时，由(27)式中可解出 $R^{1}(q^{-1})$ 和 $S(q^{-1})$，而 $R(q^{-1})=R^{1}(q^{-1})B^{+}(q^{-1})$.

2.3　模型完全匹配情况的自适应控制器

在模型完全匹配情况下，有 $G(q^{-1})=G^{1}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})$，则有 $G(b_i)=0(i=1,2,\cdots,v)$，由(21)式知 $\rho=0$，而

$$V(q^{-1})=G^{1}(q^{-1})h(q^{-1}).\tag{28}$$

(22)式变为

$$P^{*}(q^{-1})=\frac{G^{1}(q^{-1})}{F(q^{-1})}.\tag{29}$$

比较(29)式和 $P(q^{-1})=\dfrac{B^{+}(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})}$，考虑(26)式，有

$$A(q^{-1})R^{1}(q^{-1})+q^{-p}B^{-}(q^{-1})S(q^{-1})=F(q^{-1})X(q^{-1}),\tag{30}$$

$$T(q^{-1})=G^{1}(q^{-1})X(q^{-1}).\tag{31}$$

由(30)，(31)和(26)式，可解得 $S(q^{-1})$，$T(q^{-1})$ 和 $R(q^{-1})$.

特别地，如果 $B(q^{-1})$ 不含有不稳定的零点(最小相位)，则 $\rho=0$，$h(q^{-1})=1$，于是有 $P(q^{-1})=\dfrac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}$.

因而

$$A(q^{-1})R(q^{-1})+q^{-p}B(q^{-1})S(q^{-1})=B(q^{-1})F(q^{-1})X(q^{-1}),\tag{32}$$

$$T(q^{-1})=G(q^{-1})X(q^{-1}).\tag{33}$$

3　算法步骤

通过上面分析，求解自适应控制器的算法步骤可归纳如下：

1) 采用最小二乘辨识算法估计对象参数 $\hat{a}_i$ 和 $\hat{b}_j(1\leqslant i\leqslant n,0\leqslant j\leqslant m)$，用每一步估计值 $\hat{A}(q^{-1},k)$ 和 $\hat{B}(q^{-1},k)$ 来代替对象参数.

2) 将 $\hat{B}(q^{-1},k)$ 分解为 $\hat{B}^{+}(q^{-1},k)$ 和 $\hat{B}^{-}(q^{-1},k)$，并求出 $\hat{B}^{-}(q^{-1},k)$ 的零点 $b_i(i=1,2,\cdots,v)$.

3) 将 $\hat{B}^{-}(q^{-1},k)$ 的零点 $b_i(i=1,2,\cdots,v)$ 代入式(21)，求出 $\hat{\rho}(k)$ 和 $\hat{h}(q^{-1},k)$，再由(20)式求出 $\hat{V}(q^{-1},k)$.

4) 解方程(27),得 $\hat{R}^1(q^{-1},k)$,$\hat{S}(q^{-1},k)$,并由(25)式得到 $\hat{T}(q^{-1},k)$,由(26)式得到 $\hat{R}(q^{-1},k)$.

5) 最优模型匹配自适应控制器为 $\hat{R}(q^{-1},k)u(k)=-\hat{S}(q^{-1},k)y(k)+\hat{T}(q^{-1},k)r(k)$.解出 $u(k)$.

6) $k=k+1$,返回第1步.

4 应用举例

设(1)式的被控对象为一不稳定非最小相位系统,$A(q^{-1})=1-q^{-1}-0.75q^{-2}$,$B(q^{-1})=0.5+q^{-1}$,$p=1$.

1) 当参考模型为一非最小相位系统,如 $G(q^{-1})=0.2+0.44q^{-1}$,$F(q^{-1})=1-0.4q^{-1}+0.04q^{-2}$时,闭环系统的输出如图2所示,此处取 $X(q^{-1})=1-0.85q^{-1}$.

2) 当参考模型为一最小相位系统,如 $G(q^{-1})=0.135+0.125q^{-1}$,$F(q^{-1})=1-0.9q^{-1}+0.16q^{-2}$时,闭环系统的输出如图3所示,此处取 $X(q^{-1})=1-0.91q^{-1}$.

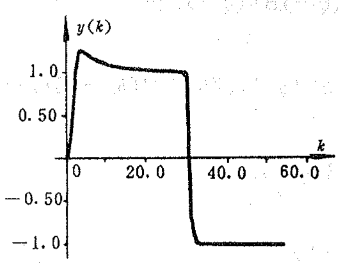

图 2 不完全模型匹配的闭环系统输出(参考模型为非最小相位系统)

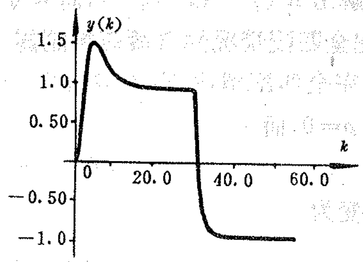

图 3 不完全模型匹配的闭环系统输出(参考模型为最小相位系统)

图2和图3均是在不完全模型匹配下所得到的结果,其中图2的性能指标函数最小为 $J_{\min}=1.65\times10^{-2}$,图3的性能指标函数最小为 $J_{\min}=4.86\times10^{-2}$.

在1)和2)两种情况下,参考输入为 $r(k)=1(k\leqslant30)$ 和 $r(k)=-1(k>30)$,参数辨识初值为 $\hat{a}_1(0)=0$,$\hat{a}_2(0)=0$,$\hat{b}_0(0)=1$,$\hat{b}_1(0)=-0.5$,且 $y(-1)=y(-2)=u(-1)=u(-2)=0$,取 $Q(-1)=100000I_4$,$\lambda=0.98$.

5 结 论

本文提出基于闭环系统与稳定的参考模型之间的误差传递函数的 H_∞ 范数最小的自适应控制器可以保证闭环系统的稳定,而不管被控对象是否稳定,是否是最小相位;这对于参数未知的系统的控制具有十分重要的实际意义.

参 考 文 献

[1] Huang, C. L. and Chen, B. S.. Adaptive Control of Optimal Model Matching in H∞-Norm Space. IEE Proceedings. 1988,135(4):295—301

[2] Francis, B. A.. A Course in H∞ Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Science, Springer-Verlag, 1987

[3] 张洪钺,胡干耀. 现代控制理论(第四册)——系统辨识. 北京航空学院出版社,1987

[4] 韩曾晋. 自适应控制系统. 机械工业出版社,1984

[5] Vidyasagar, M.. Controller System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, 1985

[6] Sarason, D.. Generalized Interpolation in H_∞, Trans. Ans. 1967, 127: 179—203

[7] Goodwin, G. C. and Sin. K. S.. Adaptive Filtering Prediction and Control, Prentice-Hall Inc., 1984

[8] Rogosinski and Shapiro. On Certain Extremum Problems for Analytic Functions, Acta Math., 1953, 90: 287—318

An Adaptive Control Algorithm of Optimal Model Matching Based on H_∞-Norm Space

MU Chundi, HU Qingyong and WU Xudong

(Department of Automation, Tsinghua University • Beijing, 100084, PRC)

Abstract: The optimal model matching adaptive controller based on the theory of minimum H_∞-norm guarantees the minimum H_∞-norm of the error transfer function between the closed-loop system and the reference model. This adaptive controller can guarantee the stability of closed-loop system (BIBO stable), regardless of whether or not the controlled plant is unstable or nonmimimum phase.

Key words: adaptive control; optimal model matching; H_∞-norm

本文作者简介

慕春棣　1946 年生. 1970 年毕业于清华大学自动控制系,留校任教,从事控制理论的教学与研究. 目前的研究领域为鲁棒控制,智能控制.

胡庆勇　1969 年生. 1992 年毕业于清华大学自动化系. 主要兴趣为鲁棒控制与非线性控制.

吴旭东　1967 年生. 1990 年毕业于清华大学自动化系. 1992 年在清华大学攻读硕士研究生. 主要兴趣为 H_∞ 控制理论与应用.