第10卷第2期
1993年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol,10, No. 2
Apr., 1993

具有扩散的 m 维 Lotka-Volterra 滞后生态模型平衡态的扇形稳定性*

谢胜利　　　　罗　琦

(荆州师专数学系·湖北,434100)　(咸宁师专数学系·湖北,437000)

摘要:本文采用 Liapunov 泛函方法,讨论了具有扩散的 m 维 Lotka-Volterra 滞后生态模型平衡态的扇形稳定性,而且还针对相应的反馈控制情形进行了讨论,获得了一些扇形稳定的充分条件.

关键词:扩散;时滞;Lotka-Volterra 生态模型;平衡态;扇形稳定性;反馈控制

1 引　言

关于种群动力学的研究,已愈来愈受到人们的足够重视,而 Lotka-Volterra 生态模型是较广泛而常见的,因此对其研究已有很多.在种群密度是均匀分布即无扩散的情形下,[1~3]及其中相应的参考文献中进行了较广泛的讨论.当种群密度是非均匀分布时,高密度位置的种群就要向低密度位置迁移(或扩散)[4],对这种含有扩散的生态模型诸如共存性、持久生存性、周期振荡等性质,[5~10]进行过一些研究.但是对含有滞后和反馈控制的相应模型的讨论,目前结果不曾多见.本文采用 Liapunov 泛函方法,对含有时滞和反馈控制的 Lotka-Volterra 生态模型的扇形稳定性[11](即部分种群持久生存而部分种群最终灭绝)进行了讨论,给出了扇形稳定的一些简捷充分条件.

2 系统的描述

在本文中,我们将要考虑如下含有常时滞的生态模型

$$\frac{\partial N_i(x,t)}{\partial t}=c_i\Delta N_i(x,t)+N_i(x,t)[b_i+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}N_j(x,t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})],$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ (x,t)\in\Omega\times R_+. \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial N_i(x,t)}{\partial t}=N_i(x,t)[c_i\Delta N_i(x,t)+b_i+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}N_j(x,t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})],$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ (x,t)\in\Omega\times R_+. \tag{2.2}$$

及具有反馈控制的相应模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_i(x,t)}{\partial t}=c_i\Delta N_i(x,t)+N_i(x,t)[b_i+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}N_j(x,t)+\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})-k_iu_i(x,t)],\\ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}=-f_iu_i(x,t)+e_iN_i(x,t),\quad i=1,2,\cdots,m;\ (x,t)\in\Omega\times R_+.\end{cases} \tag{2.3}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1991年10月14日收到.1992年4月17日收到修改稿.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_i(x,t)}{\partial t}=N_i(x,t)\Big[c_i\Delta N_i(x,t)+b_i+\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}N_j(x,t)+\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})-k_iu_i(x,t)\Big],\\ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}=-f_iu_i(x,t)+e_iN_i(x,t),\quad i=1,2,\cdots,m;\ (x,t)\in\Omega\times R_+.\end{cases}\tag{2.4}$$

其中 $N_i(x,t)$ 表示第 i 个种群在点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 及时刻 t 的密度，c_i 为相应的扩散率. $\Omega=\{x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}};\ |x_i|<\delta\}$ 是种群的分布区域，其边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. Δ 是 Ω 上的 Laplace 算子. 当 $b_i>0$ 时，表示第 i 个种群在没有其它种群相互作用的自然增长率，当 $b_i<0$ 时，表示相应的死亡率. a_{ij},b_{ij} 分别表示种群间的相互作用及前段时间对当前种群密度的影响，当它们取不同的符号时，模型分别包含了竞争、互助、捕食——被捕食生态模型.

对模型(2.1)和(2.2)考虑初边值条件

$$\begin{cases}N_i(x,t)=\varphi_i(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times[-\tau,0],\ \tau=\max\{\tau_{ij}\}>0,\\ \dfrac{\partial N_i(x,t)}{\partial n}=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times[-\tau,\infty],\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}\tag{2.5}$$

而模型(2.3)和(2.4)相应的初边值条件是(2.5)及 $u_i(x,0)=\psi_i(x),x\in\Omega$. 其中 $\varphi_i(x),\psi_i(x)$ 分别和 $\Omega\times[-\tau,\ 0]$ 是 Ω 上适当光滑的正函数，n 为 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 方程

$$b_i+\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})N_j^*=0,\quad i\in\mathscr{N}=\{1,2,\cdots,m\},\tag{2.6}$$

$$b_i+\sum_{j=1}^{m}\Big(a_{ij}+b_{ij}-\frac{e_i}{f_i}k_i\delta_{ij}\Big)N_j^*=0,\quad i\in\mathscr{N}.\tag{2.7}$$

分别称为(2.1)，(2.2)和(2.3)，(2.4)的平衡态方程，其非负解分别称为相应方程的非负平衡态. 在本文中，总假设(2.6)和(2.7)存在非负解，且对 $I\subset\mathscr{N}$，有 $i\in I$ 时 $N_i^*=0,i\in\mathscr{N}-I$ 时，$N_i^*>0$，则(2.6)和(2.7)分别为

$$b_i+\sum_{j\in\mathscr{N}-I}(a_{ij}+b_{ij})N_j^*=0,\quad i\in\mathscr{N};\ N_j^*=0,\ j\in I,\tag{2.6'}$$

$$b_i+\sum_{j\in\mathscr{N}-I}\Big(a_{ij}+b_{ij}-\frac{e_i}{f_i}k_i\delta_{ij}\Big)N_j^*=0,\quad i\in\mathscr{N};\ N_j^*=0,\ j\in I.\tag{2.7'}$$

3 主要结果

定理 1 若 $c_i>0$，且存在正常数组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使得矩阵 $B=D\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}D$ 是负定的，则(2.1)满足初边值条件(2.5)的所有正解 $N_i(x,t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\|N_i(x,t)\|_p=0,\quad\forall\ p\geqslant2;\ i\in I\ \Big(\|\cdot\|_p=\Big\{\int_\Omega|\cdot|^p\mathrm{d}x\Big\}^{1/p}\Big),$$

$$\lim_{t\to\infty}N_i(x,t)=N_i^*,\quad \text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致成立};\ i\in\mathscr{N}-I.$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\tilde{A}=A+\mathrm{diag}(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_m),A=(a_{ij}),\hat{b}_i=\sum\limits_{j=1}^{m}|b_{ij}|$.

证 设 $N(x,t)=(N_1(x,t),\cdots,N_m(x,t))$ 是(2.1)过(2.5)的正解，考虑 Liapunov 泛函

$$V(N)(t)=\sum_{i\in I}\alpha_i\int_\Omega N_i(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{j\in I}\sum_{i\in\mathscr{N}}\frac{\alpha_i}{2}|b_{ij}|\int_\Omega\int_{t-\tau_{ij}}^{t}N_j^2(x,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{i\in\mathscr{N}-I}\alpha_i\int_\Omega\big[N_i(x,t)-N_i^*-N_i^*\log(N_i(x,t)/N_i^*)\big]\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}-I}\frac{\alpha_i}{2}|b_{ij}|\int_\Omega\int_{t-\tau_{ij}}^t(N_j(x,s)-N_j^*)^2\mathrm{d}s\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

它沿着 N 的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(t)=&\sum_{i\in I}\alpha_i\int_\Omega c_i\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}\alpha_i\int_\Omega(1-\frac{N_i^*}{N_i(x,t)})c_i\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x\\&+\sum_{i\in\mathcal{N}}\alpha_i\int_\Omega(N_i(x,t)-N_i^*)\sum_{i\in\mathcal{N}}[a_{ij}(N_j(x,t)-N_j^*)+b_{ij}(N_j(x,t-\tau_{ij})-N_j^*)^2]\mathrm{d}x\\&+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{j\in\mathcal{N}}\frac{\alpha_i}{2}|b_{ij}|\int_\Omega[(N_j(x,t)-N_j^*)^2-(N_j(x,t-\tau_{ij})-N_j^*)^2]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.2}$$

由 Green 公式[12]，对 $i\in I$

$$\alpha_i c_i\int_\Omega\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x=\alpha_i c_i\int_{\partial\Omega}\frac{\partial N_i(x,t)}{\partial n}\mathrm{d}x=0. \tag{3.3}$$

对 $i\in\mathcal{N}-I$

$$\alpha_i c_i\int_\Omega(1-\frac{N_i^*}{N_i(x,t)})\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x=-c_i\alpha_i N_i^*\int_\Omega N_i^{-1}(x,t)\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

仍由 Green 公式，对 $i\in\mathcal{N}-I$ 可得

$$\int_\Omega N_i^{-1}(x,t)\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x=\int_\Omega N_i(x,t)\Delta(N_i^{-1}(x,t))\mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

经计算有

$$N_i(x,t)\Delta(N_i^{-1}(x,t))=2N_i^{-2}|\nabla N_i(x,t)|^2-N_i^{-1}(x,t)\Delta N_i(x,t). \tag{3.6}$$

其中 $|\nabla N_i(x,t)|^2=\sum_{l=1}^3\left(\frac{\partial N_i(x,t)}{\partial x_l}\right)^2$. 由(3.5)和(3.6)可得

$$\int_\Omega N_i^{-1}(x,t)\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x=\int_\Omega N_i^{-2}(x,t)|\nabla(N_i(x,t)|^2\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

再经计算(3.2)可化为

$$\dot V(t)\leqslant-\sum_{i\in\mathcal{N}-I}c_i\alpha_i N_i^*\int_\Omega N_i^{-2}(x,t)|\nabla N_i(x,t)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\lambda_{\max}(B)\int_\Omega\sum_{i\in\mathcal{N}}(N_i-N_i^*)^2\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

由于 B 是负定的，则其最大特征值 $\lambda_{\max}(B)<0$，从(3.8)式可知 $V(t)\leqslant V(0)$. 由初值 φ_i 的光滑性知，$V(0)$是有界的. 从而 $N_i(x,t)(i\in\mathcal{N})$是有界的，因 $N_i(x,t)\to\infty$时，$V(t)\to\infty$. 设 $0<N_i(x,t)\leqslant M_i=\text{const.}$，$i\in\mathcal{N}$. 则(3.8)式可化为

$$\begin{aligned}\dot V(t)\leqslant&-\sum_{i\in\mathcal{N}-I}\frac{c_i\alpha_i N_i^*}{M_i}\int_\Omega|\nabla N_i|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\lambda_{\max}(B)\int_\Omega[\sum_{i\in I}N_i^2(x,t)\\&+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}(N_i(x,t)-N_i^*)^2]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.9}$$

关于 t 积分上式，有

$$\begin{aligned}&V(t)+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}c_i\alpha_i N_i^*M_i^{-2}\int_0^t\{\int_\Omega|\nabla N_i(x,s)|^2\mathrm{d}x\}\mathrm{d}s\\&-\frac{1}{2}\lambda_{\max}(B)\int_0^t\{\int_\Omega[\sum_{i\in I}N_i^2(x,s)+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}(N_i(x,s)-N_i^*)^2]\mathrm{d}x\}\mathrm{d}s\leqslant V(0).\end{aligned} \tag{3.10}$$

由 $V(t)$的非负性及 $V(0)$的有界性知积分

$$\int_0^t\{\int_\Omega|\nabla N_i(x,s)|^2\mathrm{d}x\}\mathrm{d}s,\ \int_0^t\{\int_\Omega(N_i(x,s)-N_i^*)^2\mathrm{d}x\}\mathrm{d}s,\ i\in\mathscr{N}-I;$$
$$\int_0^t\{\int_\Omega N_i^2(x,s)\mathrm{d}x\}\mathrm{d}s,\ i\in I.$$

均收敛,由 $N_i(x,t)$ 的光滑性可知

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}\int_\Omega|\nabla N_i(x,t)|^2\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to\infty}\int_\Omega(N_i(x,t)-N_i^*)^2\mathrm{d}x=0,\ i\in\mathscr{N}-I;\\ \lim\limits_{t\to\infty}\int_\Omega N_i^2(x,t)\mathrm{d}x=0,\ i\in I.\end{cases}\tag{3.11}$$

且存在常数 M^* 使得

$$\begin{cases}|N_i(x,t)-N_i^*|\leqslant M^*;\ |\nabla N_i(x,t)|\leqslant M^*,\ i\in\mathscr{N}-I;\\ |N_i(x,t)|\leqslant M^*,\ i\in I,\end{cases}$$
$$(x,t)\in\bar\Omega\times R_+.\tag{3.12}$$

由(3.11)和(3.12)分别可得

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}\|\nabla N_i(x,t)\|_2=\lim\limits_{t\to\infty}\|N_i(x,t)-N_i^*\|_2=0,\ i\in\mathscr{N}-I;\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|N_i^2(x,t)\|=0,\ i\in I.\end{cases}\tag{3.13}$$

$$\begin{cases}\|N_i(x,t)-N_i^*\|_\infty\leqslant M^*,\ \|\nabla N_i(x,t)\|_\infty\leqslant M^*,\ i\in\mathscr{N}-I;\\ \|N_i(x,t)\|_\infty\leqslant M^*,\ i\in I,\ (\|\cdot\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega}|\cdot|).\end{cases}\tag{3.14}$$

注意不等式[12]

$$\|u\|_p\leqslant\|u\|_\infty^{(p-2)/p}\|u\|_2^{2/p},\quad\forall\ p\geqslant2.\tag{3.15}$$

由(3.13)和(3.14)可推得

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}\|N_i(x,t)-N_i^*\|_p=\lim\limits_{t\to\infty}\|\nabla N_i(x,t)\|_p=0,\quad\forall\ p\geqslant2,\ i\in\mathscr{N}-I;\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|N_i(x,t)\|_p=0,\quad\forall\ p\geqslant2,\ i\in I.\end{cases}\tag{3.16}$$

再由 Sobolev 不等式[13],对 $p>3$ 有

$$\|u\|_\infty\leqslant C\{\|u\|_p+\|\nabla u\|_p\}\equiv C\|u\|_{1,p}.\tag{3.17}$$

其中 $C=C(\Omega,p)$ 是正常数,从而对 $i\in\mathscr{N}-I$ 有

$$\|N_i(x,t)-N_i^*\|_\infty\leqslant C\{\|N_i(x,t)-N_i^*\|_p+\|\nabla N_i(x,t)\|_p\}.\tag{3.18}$$

由(2.16)可知

$$\lim_{t\to\infty}\|N_i(x,t)-N_i^*\|_\infty=0,\quad i\in\mathscr{N}-I.$$

此式便蕴含,对 $x\in\bar\Omega$ 一致有

$$\lim_{t\to\infty}N_i(x,t)=N_i^*,\quad i\in\mathscr{N}-I.\tag{3.19}$$

定理 2 若 $c_i>0$,且存在正常数组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使矩阵 $B^*=DA^*+A^{*\mathrm{T}}D$ 是负定的,则(2.2)过(2.5)的正解 $N_i(x,t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}N_i(x,t)=0,\quad 对\ x\in\bar\Omega\ 一致成立,\ i\in I;$$
$$\lim_{t\to\infty}N_i(x,t)=N_i^*,\quad 对\ x\in\bar\Omega\ 一致成立,\ i\in\mathscr{N}-I.$$

其中 $A^*=\tilde A-2\mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_m)h^{-2},h=\delta/\sqrt{3}$,$\tilde A$ 与定理1中相同.

证 设 $N_i(x,t)$ 是(2.2)的正解,考虑形如(3.1)的 Liapunov 泛函 $V(N)(t)$,我们可得

到

$$\dot{V}(t)=\sum_{i\in I}\alpha_i\int_\Omega c_iN_i\Delta N_i\mathrm{d}x+\sum_{i\in I}\alpha_i\int_\Omega N_i[b_i+\sum_{j=1}^m a_{ij}N_j+\sum_{j=1}^m b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})]\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}\alpha_i\int_\Omega(N_i-N_i^*)[c_i\Delta N_i+b_i+\sum_{j=1}^m a_{ij}N_j+\sum_{j=1}^m b_{ij}N_j(x,t-\tau_{ij})]\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{i\in I}\frac{\alpha_i}{2}|b_{ij}|\int_\Omega[N_j^2(x,t)-N_j^2(x,t-\tau_{ij})]\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{i\in\mathcal{N}}\sum_{i\in\mathcal{N}-I}\frac{\alpha_i}{2}|b_{ij}|\int_\Omega\{[N_j-N_j^*]^2-[N_j(x,t-\tau_{ij})-N_j^*]^2\}\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

由散度定理[12]可得

$$\int_\Omega N_i(x,t)\Delta N_j(x,t)\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\nabla N_i(x,t))^2\mathrm{d}x,\quad i\in I. \tag{3.21}$$

再由 Poincare 不等式[14]有

$$\int_\Omega N_i^2(x,t)\mathrm{d}x\leqslant h^2\int_\Omega(\nabla N_i(x,t))^2\mathrm{d}x,\quad (h=\delta/\sqrt{3}).$$

对 $i\in\mathcal{N}-I$，记 $W_i(x,t)=N_i(x,t)-N_i^*$，同理可得

$$\int_\Omega W_i^2\mathrm{d}x\leqslant h^2\int_\Omega(\nabla W_i)^2\mathrm{d}x;\quad \int_\Omega(N_i-N_i^*)\Delta N_i\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\nabla N_i)^2\mathrm{d}x.$$

因为矩阵的特征根连续依赖其元素，由 B^* 的负定性知，存在充分小的正数 ε，使得 $\tilde{B}$ 也是负定的. 其中 $\tilde{B}=D\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}D$，而 $\tilde{A}=\hat{A}-2h^{-2}\mathrm{diag}(c_1-\varepsilon,\cdots,c_m-\varepsilon)$. 对此 $\varepsilon>0$，分别有

$$\alpha_ic_i\int_\Omega N_i(x,t)\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x=-\alpha_ic_i\int_\Omega(\nabla N_i(x,t))^2\mathrm{d}x$$
$$\leqslant-\alpha_i\varepsilon\int_\Omega(\nabla N_i(x,t))^2\mathrm{d}x-h^{-2}(c_i-\varepsilon)\alpha_i\int_\Omega N_i^2(x,t)\mathrm{d}x,\quad i\in I, \tag{3.22}$$
$$\alpha_ic_i\int_\Omega(N_i(x,t)-N_i^*)\Delta N_i(x,t)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant-\alpha_i\varepsilon\int_\Omega(\nabla N_i(x,t))^2\mathrm{d}x-h^{-2}(c_i-\varepsilon)\alpha_i\int_\Omega(N_i(x,t)-N_i^*)^2\mathrm{d}x. \tag{3.23}$$

再类似于定理1中的相应推导可得

$$\dot{V}(t)\leqslant-\sum_{i\in\mathcal{N}}\varepsilon\alpha_i\int_\Omega|\nabla N_i|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\tilde{B})\int_\Omega[\sum_{i\in I}N_i^2+\sum_{i\in\mathcal{N}-I}(N_i-N_i^*)^2\mathrm{d}x.$$

剩下的只是完全重复定理1的有关过程.

类似于定理1和定理2可得

定理 3　若 c_i,k_i,f_i 和 e_i 为正常数，且存在正常数组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使矩阵 $B=D\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}D$ 是负定的，则(2.3)过相应初边值条件的正解 $N_i(x,t),u_i(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}N_i(x,t)=N_i^*,\quad 对\ x\in\bar{\Omega}\ 一致成立,\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|u_i(x,t)-u_i^*\|_p=0,\quad 对\ \forall\ p\geqslant 2,\end{cases}\quad i\in\mathcal{N}-I.$$

$$\lim_{t\to\infty}\|N_i(x,t)\|_p=\lim_{t\to\infty}\|u_i(x,t)\|_p=0,\quad 对\ \forall\ p\geqslant 2,\ i\in\mathcal{N}-I.$$

其中 $u_i^*=e_iN_i^*/f_i$，$i\in\mathcal{N}-I$，$\tilde{A}$ 与定理1中相同.

定理 4　若 c_i,k_i,f_i 和 e_i 均为正常数，且存在正常数组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使矩阵 B^* 是负定的，

则(2.4)过相应初边值条件的正解 $N_i(x,t),u_i(x,t)$满足

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}N_i(x,t)=N_i^*, & \text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致成立},\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|u_i(x,t)-u_i^*\|_p=0, & \text{对 }\forall\ p\geqslant 2,\end{cases}\quad i\in\mathscr{N}-I.$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}N_i(x,t)=0, & \text{对 } x\in\bar{\Omega}\text{ 一致成立},\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|u_i(x,t)\|_p=0, & \text{对 }\forall\ p\geqslant 2,\end{cases}\quad i\in I.$$

其中 $u_i^*=e_iN_i^*/f_i,i\in\mathscr{N}-I,B^*$与定理2中相同.

4 例　子

先考查含时滞和扩散的两种群互助模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_1}{\partial t}=2\Delta N_1+N_1[7-\dfrac{3}{2}N_1+\dfrac{1}{2}N_2-\dfrac{1}{3}N_1(x,t-\tau_{11})+N_2(x,t-\tau_{21})],\\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t}=2\Delta N_2+N_2[1+\dfrac{1}{3}N_1-2N_2+\dfrac{1}{3}N_1(x,t-\tau_{21})-\dfrac{1}{2}N_2(x,t-\tau_{22})],\end{cases}$$

$$(x,t)\in\Omega\times R_+.$$

$\tau_{ij}\geqslant 0,i,j=1,2$. 不难验证其平衡态为$(N_1^*,N_2^*)=(6,0)$,且 $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij}),\tilde{a}_{11}=-11/12,\tilde{a}_{12}=\dfrac{1}{2},\tilde{a}_{21}=-\dfrac{1}{2},\tilde{a}_{22}=-\dfrac{2}{3}$. 显然 $\tilde{A}$ 是对角占优的,则必存在 $D=(\alpha_1,\alpha_2)>0$使 $D\tilde{A}+\tilde{A}^{\mathrm{T}}D$ 为负定的. 由定理1知,$\lim\limits_{t\to\infty}\|N_2(x,t)\|_p=0,\forall\ p\geqslant 2$,且关于 $x\in\bar{\Omega}$ 一致成立$\lim\limits_{t\to\infty}N_1(x,t)=6$.

再考虑具有反馈控制的两种群竞争模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N_1}{\partial t}=5N_1\Delta N_1+N_1[18-\dfrac{3}{5}N_1-\dfrac{1}{10}N_2-\dfrac{1}{5}N_1(x,t-\tau_{11})-\dfrac{1}{2}N_2(x,t-\tau_{12})-2u_1],\\ \dfrac{\partial N_2}{\partial t}=10N_2\Delta N_2+N_2[19-\dfrac{1}{5}N_1-\dfrac{6}{5}N_2-N_1(x,t-\tau_{21})-\dfrac{1}{2}N_2(x,t-\tau_{22})-3u_2],\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}=-10u_1+N_1,\quad \dfrac{\partial u_2}{\partial t}=-5u_2+\dfrac{1}{3}N_2,\quad (x,t)\in\Omega\times R_+.\end{cases}$$

其中 $\tau_{ij}\geqslant 0$,而$|\Omega|=10$,即 $\delta=10$. 不难验证$(N_1^*,N_2^*,u_1^*,u_2^*)=(0,10,0,2/3)$,并且 $A^*=(\tilde{a}_{ij}),\tilde{a}_{11}=-\dfrac{1}{5},\tilde{a}_{12}=-\dfrac{1}{10},\tilde{a}_{21}=-\dfrac{1}{5},\tilde{a}_{22}=-\dfrac{3}{10}$. 显然 A^*是对角占优的. 因此由定理4可以知道,对任意的 $p\geqslant 2$有$\lim\limits_{t\to\infty}\|u_1(x,t)\|_p=0,\lim\limits_{t\to\infty}\|u_2(x,t)-2/3\|_p=0$并且对于 $x\in\bar{\Omega}$ 一致有$\lim\limits_{t\to\infty}N_1(x,t)=0,\lim\limits_{t\to\infty}N_2(x,t)=10$.

参 考 文 献

[1] Gopalsamy, K.. Global Asymptotic Stability in a Generalized Lotka-Volterra System. Int. J. Syst. Sci., 1983, 17:447—451

[2] Zhou, Z.. Global Asymptotic Stability for a Class of Manyvariable Volterra Prey-Predutor Systems. Nonlin. Anal., 1981, 5(12):1309—1329

[3] Travis, C. C.. On the Use of Reducible Functional Differential Equations in Biological Models. J. Math. Anal. Appl., 1982, 89:46—66

[4] 陈兰荪. 生物数学的基本理论与研究方法. 北京:科学出版社,1986

[5] 周笠. 含迁移的P-P系统中大时滞对Hopf分支的作用机制. 数学物理学报,1990, 10(4):415—423

[6] 陈宁，陆征一．反应扩散系统周期解的整体稳定性．应用数学，1991，4(3)：111－114

[7] 谢胜利．具有扩散的 Logistic 滞后生态模型平衡态的稳定性．科学通报，1992，37(2)：172－173

[8] 谢胜利，邓宗琦．密度分布非均匀的两种群互相作用生态模型的稳定性．生物数学学报，1991，6(4)：5－13

[9] 谢胜利．密度非均匀分布具自反馈控制捕鱼系统的稳定性．自动化学报，1993，19(2)

[10] Cosner, C.. Stable Coexistence States in the Volterra-Lotka Competition Model with Diffusion, SIAM J. Appl. Math., 1984, 44: 1112－1132

[11] 廖晓昕．稳定性的数学理论及应用．武昌：华中师大出版社，1988

[12] Joho, F.. Partial Differential Equation. Fourth Edition, Springer-Verlag, 1982

[13] Adams, R. A. 著，叶其孝等译．索伯列夫空间．人民教育出版社，1983

[14] Bers, L., Joho, F. and Schechter, M.. Partial Differential Equation. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964

Sector Stability for Steady State of the Lotka-Volterra Delays Model with Diffusion

XIE Shengli

(Department of Mathematics, Jingzhou Teacher's College·Hubei, 434100, PRC)

LUO Qi

(Department of Mathematics, Xianning Teacher's College·Hubei, 437100, PRC)

Abstract: The sector-stability of steady state of the Lotka-Volterra delay ecological model with difffusion and related feedback control models is discussed in the paper, the sufficient conditions of the sector-stability is given by method of Liapunov functional.

Key words: sector-stability; delays; Lotke-Volterra model; diffusion; feedback control

本文作者简介

谢胜利　1956年生．1981年毕业于荆州师范专科学校数学系，同年留校任教．1987年任讲师，1989年任副教授，1992年任教授．主要研究领域为微分方程的振动性、时滞方程的稳定性分解和中立型控制系统的镇定性．目前对偏泛函微分方程及在种群动力学中的应用有极大的兴趣．在国内外发表论文近50篇．

罗　琦　1958年生．1981年毕业于咸宁师范专科学校数学系，同年留校任教．1987年任讲师，1992年任副教授．对含时滞的中立型控制系统的镇定理论有极大的兴趣．关于偏泛函微分方程的振动性是目前的研究领域．发表过多篇论文．