第 10 卷第 2 期
1993 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol,10, No. 2
Apr., 1993

H_∞最优控制问题中关于在虚轴上一般变秩的研究*

胡建崑　王广雄　叶　桦　张国锋

(哈尔滨工业大学控制工程系,150006)

摘要：标准 H_∞设计要计算最优控制器 $\tilde{Q}$：$\alpha \triangleq \inf\{\|T_1-T_2QT_3\|_\infty: Q\in RH_\infty\}=\|T_1-T_2\tilde{Q}T_3\|_\infty$. 以往算法均要求 $T_2(S)$，$T_3(S)$在 $j\omega$ 轴上恒秩[2~5]，若该条件不满足，则 α 及 $\tilde{Q}$ 难以得出. 本文对 $T_2(S)$，$T_3(S)$在虚轴上秩任意变化的情况进行了深入地研究，给出一种简明的处理方法，并经实例予以验证.

关键词：H_∞最优设计；最优逼近；次优控制器

1 引　言

八十年代以来，国外出现了线性多变量控制系统的 H_∞设计方法. 它以稳定的传递函数矩阵的线性空间，即 H_∞空间的某种范数作为系统的性能指标. 设计目标是在可能发生的最坏干扰下使系统的误差在这种范数的意义下为最小. 这样控制系统的设计就归结为一个“极小极大”问题.

H_∞设计的标准问题需求解：

$$\alpha \triangleq \inf\{\|T_1-T_2QT_3\|_\infty: T_i, Q\in RH_\infty\}.$$

尽管已有不少算法[2~5]，但都要求 $T_2(S)$和 $T_3(S)$在 $j\omega$ 轴上恒秩. 本文对 T_2，T_3 在虚轴上任意变秩的情况进行了研究，给出了一种简明的处理方法，并给出一个算例进行验证.

2 推导过程及有关结论

定义 1　设 $G(S)\in RH_\infty$，则 H_∞范数为

$$\|G(S)\|_\infty=\sup_\omega \bar{\sigma}[G(j\omega)].$$

其中 $\bar{\sigma}[\cdot]$表示最大奇异值.

引理 1(Smith 型)　设 R 是一个主理想整环，$R^{n\times m}$表示 $n\times m$ 矩阵的集合，且这些矩阵的每一元素都属于 R. 设 $A\in R^{n\times m}$有秩 l，则存在单模阵 U 和 V，使得

$$UAV=H=\left[\begin{array}{cccc:c} h_1 & & & & \\ & h_2 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & h_l & \\ \hdashline & & & & 0 \end{array}\right]\begin{matrix} \\ \\ n \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \downarrow \\ - \\ \uparrow \end{matrix} l \qquad (2.1)$$

$$\rightarrow m-l \leftarrow$$

其中

$$h_i \text{ 整除 } h_{i+1}(i=1,\cdots,l-1). \qquad (2.2)$$

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于1991年6月28日收到. 1992年4月3日收到修改稿.

证 略(详见文[4]).

令 C_{+e}表示复平面上的闭右半平面,RH_∞表示 C_{+e}上解析的真有理函数阵构成的空间,则有如下定理1.

定理1 任一满秩阵 $A\in RH_\infty^{n\times m}$总可化成 G_1D_1 或者 D_2G_2 的形式.其中 $G_i,D_i\in RH_\infty$,且 $G_i(j\omega)$在虚轴上恒满秩($i=1,2$).

证 不妨设 $\mathrm{rank}(A)=n$,从引理1得知存在单模阵 $U(S)$和 $V(S)$,使得

$$U(S)A(S)V(S)=\left[\begin{array}{cccc:c} h_1(S) & & 0 & & \\ & h_2(S) & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & h_n(S) & \end{array}\right]. \tag{2.3}$$

其中

$$h_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n). \tag{2.4}$$

令 t_i 表示 h_i 在虚轴上不同零点的个数,并假设 $j\omega_1^{(i)},j\omega_2^{(i)},\cdots,j\omega_{t_i}^{(i)}$表示 h_i 在虚轴上的 $m_1^{(i)}$, $m_2^{(i)},\cdots,m_{t_i}^{(i)}$重零点,$n_i$ 重无穷远零点可采用$\left(\frac{1}{S+1}\right)^{n_i}$代替,且令

$$\begin{cases} C_i=\prod_{k=1}^{t_i}\left(\dfrac{S-j\omega_k^{(i)}}{S+1}\right)^{m_k^{(i)}}\left(\dfrac{1}{S+1}\right)^{n_i}, \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ C_i=1, \quad (n<i<m), \\ D_g=\mathrm{diag}\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}. \end{cases} \tag{2.5}$$

由此得(2.6)式如下

$$\begin{cases} g_i'=h_i/C_i\in RH_\infty, \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ G_1'=\left[\begin{array}{ccc:c} g_1' & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & g_n' & \end{array}\right], \\ G_1'\in RH_\infty^{n\times m}. \end{cases} \tag{2.6}$$

显然 $\mathrm{rank}[G_1'(j\omega)]=n=\mathrm{constant}(0\leqslant\omega\leqslant\infty)$.

由式(2.3)~(2.6)得知 $UAV=G_1'D_g$,

所以

$$A=U^{-1}G_1'D_gV^{-1}. \tag{2.7}$$

因为 U,V 均为单模阵,故 U^{-1},G_1'不改变 G_1'的秩,所以有

$$\begin{cases} A=G_1D_1, \\ G_1=U^{-1}G_1', \\ D_1=D_gV^{-1}. \end{cases} \tag{2.8}$$

且有

$$\mathrm{rank}[G_1(j\omega)]=\mathrm{rank}[G_1'(j\omega)]=n, \quad (0\leqslant\omega\leqslant\infty). \tag{2.9}$$

所以命题在 $\mathrm{rank}(A)=n$ 时确能分解成 G_1D_1,其中 $G_1\in RH_\infty,D_1\in RH_\infty$,且 $\mathrm{rank}[G_1(j\omega)]=n$ 对 $\omega\in[0,\infty]$都成立.类似地可以证明其他形式. 证毕.

考虑 H_∞距离问题

$$\begin{gathered} \alpha_0=\inf_{Q\in RH_\infty^{l\times k}}\|T_1(S)-T_2(S)Q(S)T_3(S)\|_\infty, \\ T_1(S)\in RH_\infty^{n\times m}, \quad T_2(S)\in RH_\infty^{n\times l}, \quad T_3(S)\in RH_\infty^{k\times m}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

其中 $T_2(j\omega)$和 $T_3(j\omega)$在虚轴上不恒秩，故以往的算法不能直接应用. 下面我们将给出一种方法来估算 α_0及次优控制器.

先按定理1分解

$$T_2 = G_2D_2, \quad T_3 = D_3G_3, \quad G_2 \in \mathrm{RH}_\infty^{n\times l},$$
$$D_2 \in \mathrm{RH}_\infty^{l\times l}, \quad D_3 \in \mathrm{RH}_\infty^{k\times k}, \quad G_3 \in \mathrm{RH}_\infty^{k\times m}.$$

得
$$\alpha_1 = \inf_{Q\in \mathrm{RH}_\infty^{l\times k}} \|T_1 - G_2QG_3\|_\infty. \tag{2.11}$$

此时 $G_2(j\omega),G_3(j\omega)$在虚轴上恒满秩，故 α_1可达，且有现成算法[2~5]. 不妨令 $\tilde{Q}$ 为上式的最优解，即

$$\alpha_1 = \|T_1 - G_2\tilde{Q}G_3\|_\infty. \tag{2.12}$$

因为
$$T_2\mathrm{H}_\infty T_3 \subseteq G_2\mathrm{H}_\infty G_3,$$
所以
$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1.$$
令 Q_ε 为式(2.10)的一族次优解，即

$$\alpha_\varepsilon = \|T_1 - T_2Q_\varepsilon T_3\|_\infty. \tag{2.13}$$

则有
$$\alpha_\varepsilon \geqslant \alpha_0 \geqslant \alpha_1, \quad (\varepsilon > 0). \tag{2.14}$$

定理 2　如果我们能找到一组无穷序列控制器 Q_ε,使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \alpha_\varepsilon = \alpha_1. \tag{2.15}$$

则必有
$$\alpha_0 = \alpha_1.$$

证　从极限的定义易知，当式(2.15)成立时若 $\alpha_0>\alpha_1$,则必存在一常数 $\varepsilon_0>0$,使得对于所有的 $\varepsilon>\varepsilon_0$,都有 $\alpha_0>\alpha_\varepsilon$,这样与式(2.14)中 $\alpha_\varepsilon\geqslant\alpha_0(\varepsilon>0)$的基本事实相矛盾，矛盾的原因在于错误前题 $\alpha_0\neq\alpha_1$(亦即 $\alpha_0>\alpha_1$). 所以当式(2.15)成立时必有 $\alpha_0=\alpha_1$.　　证毕.

下面我们来寻找这组控制器. 先把 T_2,T_3按定理1的形式分解，即

$$T_2 = G_2D_2, \quad T_3 = D_3G_3.$$

其中 $D_2=D_gV^{-1},D_3=U^{-1}D_f(U,V$ 为单模阵)

所以
$$\alpha_0 = \inf_{Q\in \mathrm{RH}_\infty} \|T_1 - G_2D_gQD_fG_3\|_\infty. \tag{2.16}$$

其中

$$g_i = \prod_{k=1}^{t_i}\left(\frac{S-j\omega_{kg}^{(i)}}{S+1}\right)^{m_{kg}^{(i)}}\left(\frac{1}{S+1}\right)^{n_g^{(i)}}, \quad (i=1,2,\cdots,l),$$
$$D_g = \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_l \end{bmatrix} \in \mathrm{RH}_\infty^{l\times l}. \tag{2.17}$$

$m_{kg}^{(i)}$是 T_2相应式(2.3)中第 i 元素在虚轴上的第 k 个零点 $j\omega_{kg}^{(i)}$的重数，其余符号含意与定理1证明过程中所用的类似.

同理

$$f_i = \prod_{k=1}^{t_i'}\left(\frac{S-j\omega_{kf}^{(i)}}{S+1}\right)^{m_{kf}^{(i)}}\left(\frac{1}{S+1}\right)^{n_f^{(i)}}, \quad (i=1,2,\cdots,k),$$
$$D_f = \mathrm{diag}\{f_1,f_2,\cdots,f_k\} \in \mathrm{RH}_\infty^{k\times k}. \tag{2.18}$$

$m_{kg}^{(i)}$是 T_3 相应式(2.3)中第 i 元素在虚轴上的第 k 个零点 $j\omega_{kf}^{(i)}$的重数，其余符号与式

(2.17)对应,易从式(2.3)~式(2.8)中看出.

令

$$X_{\varepsilon i}=\prod_{k=1}^{l_i'}\left[\frac{S-j\omega_{kg}^{(i)}}{S+\varepsilon-j\omega_{kg}^{(i)}}\right]^{m_{kg}^{(i)}}\left(\frac{1}{\varepsilon S+1}\right)^{n_g^{(i)}},\quad(\varepsilon>0).\tag{2.19}$$

则

$$g_i^{-1}X_{\varepsilon i}=\prod_{k=1}^{l_i'}\left[\frac{S+1}{S+\varepsilon-j\omega_{kg}^{(i)}}\right]^{m_{kg}^{(i)}}\left(\frac{S+1}{\varepsilon S+1}\right)^{n_g^{(i)}}\in \mathrm{RH}_\infty.\tag{2.20}$$

再令 $X_\varepsilon=\mathrm{diag}(X_{\varepsilon1},\cdots,X_{\varepsilon l})$,则 $D_g^{-1}X_\varepsilon\in\mathrm{RH}_\infty$. 同理有 $Y_\varepsilon=\mathrm{diag}(Y_{\varepsilon1},\cdots,Y_{\varepsilon k})$,则 $Y_\varepsilon D_f^{-1}\in\mathrm{RH}_\infty$. 此外,易知在不包含 $|D_f|$ 和 $|D_g|$ 在虚轴上零点的区间上有

$$X_\varepsilon(j\omega)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}I,\quad Y_\varepsilon(j\omega)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}I.\tag{2.21}$$

再令

$$Q_\varepsilon=D_g^{-1}X_\varepsilon\widetilde{Q}Y_\varepsilon D_f^{-1}.\tag{2.22}$$

则 $Q_\varepsilon\in\mathrm{RH}_\infty$将 Q_ε 代入式(2.16)得

$$\begin{aligned}\alpha_\varepsilon(Q_\varepsilon)&=\|T_1-G_2D_gD_g^{-1}X_\varepsilon\widetilde{Q}Y_\varepsilon D_f^{-1}D_fG_3\|_\infty\\&=\|T_1-G_2X_\varepsilon\widetilde{Q}Y_\varepsilon G_3\|_\infty.\end{aligned}\tag{2.23}$$

令 $\|\cdot\|\triangleq\bar\sigma(\cdot)$(最大奇异值),据式(2.21)知在虚轴上不含 T_2,T_3 变秩点的区间上有

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0^+}\|T_1(j\omega)-G_2(j\omega)X_\varepsilon(j\omega)\widetilde{Q}(j\omega)Y_\varepsilon(j\omega)G_3(j\omega)\|\\&=\|T_1(j\omega)-G_2(j\omega)\widetilde{Q}(j\omega)G_3(j\omega)\|.\end{aligned}\tag{2.24}$$

重排 T_2,T_3 在虚轴上的变秩点,亦即 $|D_f|$ 和 $|D_g|$ 在虚轴上的不同零点为 $j\omega_0,j\omega_1,\cdots,j\omega_p$,我们将得到如下定理.

定理 3 设 $R=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_p\}$,若下式

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sup_{\omega\in R}\|T_1(j\omega)-G_2(j\omega)X_\varepsilon(j\omega)\widetilde{Q}(j\omega)Y_\varepsilon(j\omega)G_3(j\omega)\|\leqslant\alpha_1\tag{2.25}$$

成立,则有 $\alpha_0=\alpha_1$;若式(2.25)不成立,则我们据式(2.14)通过计算 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon$ 和 α_1 可以估算 α_0,且估算仅需在变秩点上进行.

证 我们只需证明当式(2.25)成立时有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1$,则据定理 2 就可证明本命题.

据定义 1,式(2.23)~(2.24)知

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\max\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\sup\limits_{\omega\in R}\|T_1-G_2X_\varepsilon\widetilde{Q}Y_\varepsilon G_3\|,\\\sup\limits_{\omega\notin R}\|T_1(j\omega)-G_2(j\omega)\widetilde{Q}(j\omega)G_3(j\omega)\|.\end{cases}\tag{2.26}$$

同理据式(2.12)

$$\alpha_1=\max\begin{cases}\sup\limits_{\omega\in R}\|T_1-G_2\widetilde{Q}G_3\|,\\\sup\limits_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\widetilde{Q}G_3\|.\end{cases}\tag{2.27}$$

当式(2.25)成立时有下列情形.

情形 1

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sup_{\omega\in R}\|T_1-G_2X_\varepsilon\widetilde{Q}Y_\varepsilon G_3\|=\alpha_1.\tag{2.28}$$

此时式(2.27)无外乎以下情况

①
$$\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|=\alpha_1, \tag{2.29}$$

则据式(2.26)及(2.28)知$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1$.

②
$$\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|\neq\alpha_1,$$

则据式(2.27)知 $\alpha_1>\sup\limits_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|$.

又据式(2.14)知

$$\alpha_\varepsilon\geqslant\alpha_1>\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|.$$

结合式(2.26)及式(2.28)知$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1$.

情形 2

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\sup_{\omega\in R}\|T_1-G_2X_\varepsilon\tilde{Q}Y_\varepsilon G_3\|<\alpha_1. \tag{2.30}$$

此时因为 $\alpha_\varepsilon\geqslant\alpha_1$,据式(2.26)知

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\sup_{\omega\notin R}\|T_1(j\omega)-G_2(j\omega)\tilde{Q}(j\omega)G_3(j\omega)\|. \tag{2.31}$$

同理,此时若式(2.27)有

①
$$\alpha_1=\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|.$$

则据式(2.31)得$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1$.

② 若

$$\alpha_1\neq\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|. \tag{2.32}$$

则据式(2.27)得　$\alpha_1>\sup\limits_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|$.

又因
$$\alpha_\varepsilon\geqslant\alpha_1,$$
所以
$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon\geqslant\alpha_1>\sup_{\omega\notin R}\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|.$$

因此与式(2.31)相矛盾,故这种情况不成立.

综上所述,当式(2.25)成立时总有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1$$

成立.再结合定理 2 推得 $\alpha_0=\alpha_1$.　　证毕.

3　几个值得注意的问题

1) 当式(2.25)成立时,则有 $\alpha_0=\alpha_1$.若只要求知道 α_0,则我们只需采用现有的各种算法计算出 α_1,即可求出 α_0 而不必考虑 Q_ε 及 ε 的取值.若除了 α_0 之外,还想求出达到或逼近 α_0 的控制器,则我们可据定理 3 构造出一组无穷序列$\{Q_\varepsilon\}$,使得

$$\alpha_\varepsilon(Q_\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\alpha_1=\alpha_0.$$

2) 工程应用时 ε 不可能取无限小,即对给定 $\varepsilon_0\neq0$,可能会有 $\alpha_{\varepsilon_0}>\alpha_1$.但据定理 3 知 $\alpha_{\varepsilon_0}\xrightarrow[\varepsilon_0\to0^+]{}\alpha_1$,故只要 ε_0 取得足够小,Q_{ε_0}总可以保证获得十分好的逼近效果.事实上,工程应用时 ε 并不需要取得非常小,因为在工程问题中我们主要关心工作在主频带$[\omega_0,\omega_c]$内的系统特性.实际系统中带宽大于 100Hz 数量级的并不多见.如一般机电、化工过程系统带宽

多在 20Hz 以下. 所以我们取 $\varepsilon=10^{-6}$一般会得较好的逼近效果. 如下面所举的例子中, 取 $\varepsilon=10^{-3}$就使 α_ε 与 α_0 的绝对误差不超过 1%, 获得十分理想的逼近效果.

3) 满足 $\alpha_0=\alpha_1$ 的系统相对来说是很多的. 因为据定理 2 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\alpha_\varepsilon=\alpha_1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_0=\alpha_1.$$

又据式(2.26)~(2.27), $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\alpha_\varepsilon$ 与 α_1 表达式仅在有限变秩点集 R 上才有所不同. 而 R 是个零测度集.

4) 实际工程设计时大都求次优问题

$$\|T_1-T_2QT_3\|_\infty<\gamma,\quad (\gamma>\alpha_0).$$

这种 $\gamma>\alpha_0$ 的余量将大大降低对 ε 取小值的要求, 从而使本文的方法更加实用.

4 算　例

考虑如下 H_∞问题

$$\alpha_0=\inf_{Q\in RH_\infty^{2\times 2}}\left\|\begin{bmatrix}\dfrac{10}{S+1} & \dfrac{(S-1)(S+1)}{(S+5)(S+3)}\\[2mm] \dfrac{S+2}{S+5} & \dfrac{10(S-1)(S+2)}{(S+5)(S+1)}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{1}{S+1} & 0\\[2mm] 0 & \dfrac{S+2}{S+1}\end{bmatrix}Q\right\|_\infty.$$

显然

$$\operatorname{rank}[T_2(j\omega)]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{j\omega+1} & 0\\[2mm] 0 & \dfrac{j\omega+2}{j\omega+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{cases}2, & \omega\neq\infty,\\ 1, & \omega=\infty.\end{cases}$$

这里 T_2 不满足恒秩条件, 且 $T_2^{-1}(S)\notin RH_\infty$. 下面我们采用本文所给方法来估算 α_0 及次优控制器.

令

$$T_2=G_2D_2,$$

则有

$$G_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{S+2}{S+1}\end{bmatrix},\quad D_2=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{S+1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

对照式(2.16)~(2.17), 显见

$$D_2=D_g$$

$$g_1=\frac{1}{S+1},\quad \text{(只有一个无穷远点为变秩点)}.$$

$$g_2=1.$$

我们先求

$$\alpha_1=\inf_{Q\in RH_\infty^{2\times 2}}\|T_1-G_2QG_3\|_\infty=\|T_1-G_2\tilde{Q}G_3\|_\infty,$$

求出 $\alpha_1=0$, 且

$$\tilde{Q}(S) = \begin{bmatrix} \frac{10}{S+1} & \frac{(S-1)(S+1)}{(S+5)(S+3)} \\ \frac{S+1}{S+5} & \frac{10(S-1)}{S+5} \end{bmatrix}.$$

令

$$X_{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon S + 1}, \quad (\varepsilon > 0),$$

$$X_{\varepsilon_1} = 1,$$

所以
$$X_\varepsilon = \mathrm{diag}(X_{\varepsilon_1} \quad X_{\varepsilon_2}) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\varepsilon S + 1} \quad 1\right),$$

故
$$D_g^{-1} X_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{S+1}{\varepsilon S + 1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in RH_\infty^{2\times 2}.$$

取

$$Q_\varepsilon = D_g^{-1} X_\varepsilon \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \frac{10}{\varepsilon S + 1} & \frac{(S-1)(S+1)^2}{(S+5)(S+3)(\varepsilon S+1)} \\ \frac{S+1}{S+5} & \frac{10(S-1)}{S+5} \end{bmatrix}.$$

将 $Q_\varepsilon(S)$代入 α_0的表达式中，得

$$\alpha_\varepsilon = \|T_1 - G_2 X_\varepsilon \tilde{Q}\|_\infty$$
$$= \sup_\omega \left|1 - \frac{1}{j\varepsilon\omega + 1}\right| \frac{10}{|j\omega + 1|}.$$

因为
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left|1 - \frac{1}{j\varepsilon\infty + 1}\right| \frac{10}{|j\infty + 1|} = 0,$$

所以式(2.25)成立，此时 $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$.

$$\alpha_\varepsilon = \sup_\omega \left|\frac{j\varepsilon\omega}{1 + j\varepsilon\omega}\right| \frac{10}{|j\omega + 1|}.$$

易证 $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$是极大值点，所以

$$\alpha_\varepsilon = \frac{10\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

取 $\varepsilon = 0.001$，则 $\alpha_\varepsilon = 9.99 \times 10^{-3}$. 显见 α_ε 是十分接近 $\alpha_0 = 0$的.

5 结束语

本文对病态 H_∞控制问题，即 H_∞距离问题

$$\alpha = \inf_{Q \in RH_\infty} \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty$$

中 $T_2(j\omega)$，$T_3(j\omega)$在虚轴上不恒秩的情况进行了深入地研究. 提出了一种简单的处理方法，并给出算例验算.

致谢 感谢哈尔滨工业大学数学系王民智教师对该稿给予的帮助.

参 考 文 献

[1] 申铁龙,田村捷利. H^{∞}最优控制系统设计及应用. 信息与控制,1990, 19(4):33—43

[2] Francis, B. A.. A Course in H^{∞} Control Theory. New York:Springer-Verlag, 1987

[3] Francis, B. A. and Doyle, J. C.. Linear Control Theory with an H^{∞} Optimality Criterion. SIAM J. Contr. and Optim., 1987, 815—844

[4] Vidyasagar, M.. Control System Synthesis. Cambridge: MIT Press, 1985

[5] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonegar, K. and Francis, B. A.. State-Space Solutions to Standard H_2 and H^{∞} Control Problems. IEEE Trans. Auto. Contr., 1989, AC-34:831—847

Treatment of Rank Condition on $j\omega$-Axis in H_{∞} Optimal Design

HU Jiankun, WANG Guangxiang, YE Hua and ZHANG Guofeng

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology·Harbin, 150006, PRC)

Abstract: The standard problem of H_{∞} optimal control design has to compute an optimal controller $\widetilde{Q}$: $\alpha \triangleq \inf\{\|T_1-T_2QT_3\|_{\infty}: Q\in RH_{\infty}\}$. Existing algorithms require that $T_1(S)$, $T_3(S)$ be constant ranks on $j\omega$-axis. This paper will give a simple and reliable method to remove any rank requirement on $T_2(S)$, $T_3(S)$.

Key words: H_{∞} optimal control; optimal sequences; rank condition

本文作者简介

胡建崑 1963年生. 现为哈尔滨工业大学控制系博士生. 研究兴趣为鲁棒控制及离散事件,FMS 等. 博士论文研究领域为 H_{∞}及 μ 综合理论. 在这期间已发表或接受的论文有10余篇.

王广雄 1933年生. 教授,博士生导师. 1957年毕业于哈尔滨工业大学研究生班. 长期从事自动控制的理论教学和精密测试技术中的高精度伺服系统的设计研究工作. 主要研究方向是控制系统的设计理论. 目前从事 H_{∞}控制理论及其应用的研究.

叶 桦 女. 1963年生. 1982年于长沙铁道学院获工学学士学位. 现在哈尔滨工业大学汽车学院任工程师,实验室副主任,并正在攻读在职硕士。目前研究领域为汽车故障诊断与分析.

张国峰 1963年生. 分别于1984年,1987年获哈尔滨工业大学工学学士,硕士学位. 1987年留校任教. 现在攻读在职博士. 目前研究方向为 H_{∞}优化控制,数字控制.