灰色建模的新计算格式及其应用

顾今　　曹鸿兴　魏凤英

(苏州市第一中学,215006)　(中国气象科学研究院·北京,100081)

摘要：基于使双向差分误差最小的准则，利用最小二乘原理，本文导出了估计灰色模型参数的一种新计算格式. 作为其应用，文中给出了大气中二氧化碳含量和我国出口贸易预测的实例，其效果是令人满意的.

关键词：时序分析；系统预测；建模

1 引　言

灰色系统理论自1982年由邓聚龙创建以来[1]，在理论和应用方面都取得了显著的成绩. 在现有的灰色建模中，建立运算矩阵 B 时，需对前后两时刻的数据进行两点滑动平均，这种处理并非数学推导的必然结果. 在本文中我们考虑利用一种被称之为双向差分误差最小的准则，运用最小二乘法，导出了相应的计算格式.

2 累加、后减、前减的定义及其与差分的关系

设系统有 h 个因素的原始数据列 $\{x_{i,k}^{(0)}\}_{k=1,2,\cdots,N}^{i=1,2,\cdots,h}$. N 为样本量. 假设数据列为等时间间隔取样.

它们的一次累加为：$x_{i,k}^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}x_{i,j}^{(0)}$.

我们将相邻两数据之差称为相减，与向后差分和向前差分相应又分别定义后减和前减如下：

令零次相减为

$$\alpha^0(x_{i,k}^{(1)})=x_{i,k}^{(1)}.$$

一次后减为

$$\alpha_b^1(x_{i,k}^{(1)})=\alpha_b^0(x_{i,k}^{(1)})-\alpha_b^0(x_{i,k-1}^{(1)})=x_{i,k}^{(1)}-x_{i,k-1}^{(1)}=x_{i,k}^{(0)}.$$

二次后减为

$$\alpha_b^2(x_{i,k}^{(1)})=\alpha_b^1(x_{i,k}^{(1)})-\alpha_b^1(x_{i,k-1}^{(1)})=x_{i,k}^{(0)}-x_{i,k-1}^{(0)}=C_1^0x_{i,k}^{(0)}-C_1^1x_{i,k-1}^{(0)}.$$

⋮

类推，n 次后减为

$$\alpha_b^2(x_{i,k}^{(1)})=C_{n-1}^0x_{i,k}^{(0)}-C_{n-1}^1x_{i,k-1}^{(0)}+C_{n-1}^2x_{i,k-2}^{(0)}-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}x_{i,k-n+1}^{(0)}.$$

仿上，再定义前减.

一次前减为

$$\alpha_f^1(x_{i,k}^{(1)})=x_{i,k+1}^{(0)}.$$

本文于1991年8月6日收到. 1992年1月11日收到修改稿.

二次前减为

$$a_f^2(x_{i,k}^{(1)}) = C_1^0 x_{i,k+2}^{(0)} - C_1^1 x_{i,k+1}^{(0)}.$$

$\vdots$

n 次前减为

$$a_f^n(x_{i,k}^{(1)}) = C_{n-1}^0 x_{i,k+n}^{(0)} - C_{n-1}^1 x_{i,k+n-1}^{(0)} + C_{n-1}^2 x_{i,k+n-2}^{(0)} - \cdots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} x_{i,k+1}^{(0)}.$$

其中 $C_n^m = n!/m!(n-m)!$. 由此可见，各次后减和前减都可以通过原始数据直接计算，为书写简单起见，将其结果分别记为：

$$\begin{aligned} a_b^1(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{b,k}^1, & a_f^1(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{f,k}^1, \\ a_b^2(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{b,k}^2, & a_f^2(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{f,k}^2, \\ &\vdots & &\vdots \\ a_b^n(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{b,k}^n, & a_f^n(x_{i,k}^{(1)}) &= d_{f,k}^n. \end{aligned}$$

3 GM(n,h)的参数估计

现在考虑系统有 h 个因素的数据列，试用下列 n 阶微分方程来进行拟合

$$\frac{d^n x_1^{(1)}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_1^{(1)}}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x_1^{(1)}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} = -b_1 x_1^{(1)} - b_2 x_2^{(1)} - \cdots - b_h x_h^{(1)}. \tag{3.1}$$

用差商代替导数，并令 $\Delta t=1$，(3.1)式就变为差分方程. 再考虑差分与相减的关系，得到后差型误差

$$e_{b,k} = d_{b,k}^n + a_1 d_{b,k}^{n-1} + a_2 d_{b,k}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} d_{b,k}^1 + b_1 x_{1,k}^{(1)} + b_2 x_{2,k}^{(1)} + \cdots + b_h x_{h,k}^{(1)}.$$

同理可得前差型误差

$$e_{f,k} = d_{f,k}^n + a_1 d_{f,k}^{n-1} + a_2 d_{f,k}^{n-2} + \cdots + a_{n-1} d_{f,k}^1 + b_1 x_{1,k}^{(1)} + b_2 x_{2,k}^{(1)} + \cdots + b_h x_{h,k}^{(1)}.$$

我们考虑用向后差分误差和向前差分误差(简称双向误差)的最小二乘原理来估计参数，即使

$$e^2 = \sum_{k=n+1}^{N-n} (e_{b,k}^2 + e_{f,k}^2) \to \min,$$

$k=1$，留作解方程(3.1)的初值用.

$$\frac{\partial e^2}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial e^2}{\partial b_j} = 0, \quad i = 1, 2 \cdots, n-1, \quad j = 1, 2, \cdots, h. \tag{3.2}$$

方程(3.2)两边除以 $2(N-2n)$，再令

$$Z_{1,1} = -\frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=n+1}^{N-n} (d_{b,k}^n d_{b,k}^{n-1} + d_{f,k}^n d_{f,k}^{n-1}),$$

$\vdots$

$$Z_{1,n-1} = -\frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=n+1}^{N-n} (d_{b,k}^n d_{b,k}^1 + d_{f,k}^n d_{f,k}^1),$$

$$Z_1 = -\frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=n+1}^{N-n} (d_{b,k}^n x_{1,k}^{(1)} + d_{f,k}^n x_{1,k}^{(1)}),$$

$\vdots$

$$Z_h = -\frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=n+1}^{N-n} (d_{b,k}^n x_{h,k}^{(1)} + d_{f,k}^n x_{h,k}^{(1)}),$$

$$V_{11}=\frac{1}{2(N-2n)}\sum_{k=n+1}^{N-n}\left[(d_{b,k}^{n-1})^2+(d_{f,k}^{n-1})^2\right],$$

$$\vdots$$

$$V_{n-1,n-1}=\frac{1}{2(N-2n)}\sum_{k=n+1}^{N-n}\left[(d_{b,k}^{1})^2+(d_{f,k}^{1})^2\right],$$

$$V_1=\frac{1}{N-2n}\sum_{k=n+1}^{N-n}(x_{1,k}^{(1)})^2,$$

$$\vdots$$

$$V_h=\frac{1}{N-2n}\sum_{k=n+1}^{N-n}(x_{h,k}^{(1)})^2,$$

$$S_{12}=s_{21}=\frac{1}{2(N-2n)}\sum_{k=n+1}^{N-n}(d_{b,k}^{n-2}d_{b,k}^{n-1}+d_{f,k}^{n-2}d_{f,k}^{n-1}),$$

$$S_{13}=s_{31}=\frac{1}{2(N-2n)}\sum_{k=n+1}^{N-n}(d_{b,k}^{n-3}d_{b,k}^{n-1}+d_{f,k}^{n-3}d_{f,k}^{n-1}),$$

$$S_{23}=s_{32}=\frac{1}{2(N-2n)}\sum_{k=n+1}^{N-n}(d_{b,k}^{n-3}d_{b,k}^{n-2}+d_{f,k}^{n-3}d_{f,k}^{n-2}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$Z=\begin{bmatrix}Z_{11}\\ \vdots\\ Z_{1n-1}\\ Z_1\\ \vdots\\ Z_h\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ b_1\\ \vdots\\ b_h\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}V_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & \\ S_{21} & V_{22} & S_{23} & & \\ S_{31} & S_{32} & V_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & & V_h\end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

这样,(3.2)式可写成矩阵形式

$$Z=V\beta. \tag{3.4}$$

β 的最小二乘估计

$$\hat{\beta}=(V^{\mathrm{T}}V)^{-1}V^{\mathrm{T}}Z. \tag{3.5}$$

类似地我们可推导出好几种模型计算公式.为下面叙述实例方便,我们给出 GM(1,1)的计算公式.

4 GM(1,1)的参数估计

假设原始数据列为

$$x_1^{(0)}=\{x_{1,k}^{(0)}\},\quad k=1,2,\cdots,N.$$

N 为样本量.

不难看出,一次后减相当于通常关于时间的一阶向后差分,即

$$\Delta_b x_{1,k}^{(1)}=x_{1,k}^{(1)}-x_{1,k-1}^{(1)}=x_{1,k}^{(0)}.$$

同样,可以定义前减

$$\Delta_f x_{1,k}^{(1)}=x_{1,k+1}^{(1)}-x_{1,k}^{(1)}=x_{1,k+1}^{(0)}.$$

现在我们来考虑下列微分方程

$$\frac{dx_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} + a_1 x_1^{(1)} = -u. \tag{4.1}$$

这里 $a=b_1, u=b_2$,令 $x_2^{(1)}=\{x_{2,k}^{(1)}\}\equiv 1, \Delta t=1$,用差商代替导数,(4.1)变为差分方程

$$\Delta x_1^{(1)} = -\sum_{i=1}^{2} b_i x_i^{(1)}. \tag{4.2}$$

相应地误差公式如下

$$\begin{aligned} e_{b,k} &= \Delta_b x_{1,k}^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} b_i x_{i,k}^{(1)}, \\ e_{f,k} &= \Delta_f x_{1,k}^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} b_i x_{i,k}^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

令

$$e^2 = \sum_{k=2}^{N-1} [(e_{b,k})^2 + (e_{f,k})^2] \to \min,$$

即可求得估计一阶微分方程的参数 b_1 和 b_2 的公式为

$$\hat{\beta} = (V^{\mathrm{T}}V)^{-1}V^{\mathrm{T}}Z. \tag{4.4}$$

式中

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V_1 & S_1 \\ S_1 & V_2 \end{bmatrix},$$

$$Z_{11} = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{k=2}^{N-1} (x_{1,k}^{(0)} x_{1,k}^{(1)} + x_{1,k+1}^{(0)} x_{1,k}^{(1)}),$$

$$Z_{12} = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{k=2}^{N-1} (x_{1,k}^{(0)} + x_{1,k+1}^{(0)}),$$

$$V_1 = \frac{1}{N-2} \sum_{k=2}^{N-1} (x_{1,k}^{(1)})^2,$$

$$V_2 = \frac{1}{N-2} \sum_{k=2}^{N-1} (x_{2,k}^{(1)})^2 = 1,$$

$$S_1 = \frac{1}{N-2} \sum_{k=2}^{N-1} x_{1,k}^{(1)}.$$

最后,用估计出的 $\hat{b}_1$和 $\hat{b}_2$代入时间响应方程

$$x_{1,k+1}^{(1)} = (x_{1,1} + \frac{\hat{b}_2}{\hat{b}_1}) e^{-\hat{b}_1 k} - \frac{\hat{b}_2}{\hat{b}_1}. \tag{4.5}$$

5　计算实例

5.1　二氧化碳浓度的预测

自工业革命以来,大气中二氧化碳浓度急剧增加,二氧化碳(CO_2)将产生温室效应,使全球气温增高.气温的增高导致世界许多地区气候的变化,两极冰融化和海平面升高.这些将造成环境、生态和农业等一系列全球性影响.因此,对二氧化碳浓度的预测引起多方面的关注.

用檀香山 Mauna Loa 观测台的 1968 年至 1982 年 CO_2 年平均数据(见表 1),用第 4 节的公式建立 GM(1,1)模型.估计出的参数值为

$$\hat{b}_1 = -0.00381, \quad \hat{b}_2 = -332.200.$$

把初值 $x_{1,1}=322.72$ 代入(4.5),得到

$$x_{1,k+1}^{(1)} = 84944.99e^{0.00381k} - 84622.27. \tag{5.1}$$

表1 1968年至1982年 CO_2 观测和拟合值(单位:ppmv)

项目 \ CO_2 \ 年	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
观测	322.72	324.21	325.51	326.48	327.60	329.82	330.41	331.01
拟合	322.72	324.05	325.27	326.52	327.78	329.01	330.28	331.53
项目 \ CO_2 \ 年	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	
观测	332.06	333.62	335.19	336.54	338.40	339.46	340.76	
拟合	332.80	334.06	335.34	336.63	337.90	339.20	340.48	

用(5.1)作了1983年至1987年的试报,结果列在表2.用(5.1)拟合和试报的均方根误差为0.526ppm,平均相对误差为0.526/331.63=0.15%,其中331.63为1968年至1982年的平均值.可见,效果相当好.

表2 1983年至1987年 CO_2 观测与试报值(单位:ppmv)

项目 \ CO_2 \ 年	1983	1984	1985	1986	1987
观测	342.76	344.34	345.65	346.80	348.56
试报	341.78	343.09	344.40	345.71	347.04

又使用1968年至1987年数据用双向差分建模,拟合的均方根误差为0.392ppm,平均相对误差为0.392/335.04=0.12%,其中335.04ppm为1968年至1987年的平均值.仍取1968年至1987年资料,用邓聚龙的方案建模,拟合的均方根误差为0.759ppm,平均相对误差为0.23%.

5.2 我国出口贸易额预测

取我国1978年至1987年出口贸易额、贸易量和价格指数用双向差分建模,并与邓聚龙的建模方案结果进行比较.表3为三个序列的拟合平均相对误差.从表3可见,双向差分建模的平均相对误差均小于用邓聚龙方案的建模.

表3 1978年至1987年拟合平均相对误差%

方案 \ 项目	出口贸易额	出口贸易量	出口价格
双向差分	6.42	3.066	5.76
邓聚龙方案	6.61	3.59	6.03

又用1978年至1985年资料建模,对1986年和1987两年试报.试报结果列在表4.从表4中可以看出,除1987年的贸易额一项双向差分的相对误差比邓聚龙方案的大外,其余11项误差均小于用邓聚龙方案计算的误差.

表 4　1986 年至 1987 年试报与实际值

相对误差% 方案 / 项目	双向差分		邓聚龙方案		实际值	
	1986	1987	1986	1987	1986	1987
出口贸易额	6.54	10.53	6.92	9.64	147.3	189.9
出口贸易量	6.79	14.14	6.97	14.22	206.1	249.5
出口价格	16.86	7.29	19.08	10.16	71.7	76.1

由以上实例可见，双向差分建模拟合和预报效果都要比邓聚龙的方案要好. 从我们已计算过的不同类型的时间序列来看，几乎都是双向差分方案比邓方案好.

参 考 文 献

[1] 邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉：华中工学院出版社，1985，318—324
[2] 曹鸿兴等. 双向灰色建模及其在旱涝灾害预报中的应用. 数学的实践与认识，1990，1：29—35

A New Calculating Scheme for Grey Modelling and Its Application

GU Jin
(Suzhou First Middle School • Suzhou, 215006, PRC)
CAO Hongxing and WEI Fengying
(Chinese Academy of Meteorological Sciences • Beijing, 100081, PRC)

Abstract: On the basis of minimum of bilateral difference errors, a new calculating scheme is deduced for estimating parameters in grey modelling by means of least square. As its application, forecasts of carbon dioxide concentration in the atmosphere and the foreign trade of China are exemplified and they are in good agreement with the statistical data.

Key words: time series analysis; system prediction; modelling

本文作者简介

顾 今 1931 年生. 1962 年毕业于南京大学气象系. 一直在中学任物理教师. 与他人合著"灰色系统理论浅述"一书，发表了"天气预报为蔺草收割服务经济效益的估算"等文章. 主要研究兴趣为系统科学，无限小与无限大，未来学等.

曹鸿兴 1937 年生. 副研究员. 1962 年毕业于南京大学气象系. 1982 年至 1984 年在德国洪堡基金会资助下在汉堡大学做博士后研究，1989 年至 1991 年在英国哈特莱气候中心作客座研究，曾发表学术论文 120 余篇和 5 本专著. 目前的主要研究兴趣为气候动力学，统计气象，模糊集，系统预测以及系统周界理论(界壳理论)等.

魏凤英 女. 1951 年生. 助理研究员. 1977 年毕业于吉林大学数学系. 曾发表过二十几篇学术论文，并与他人合著"长期预测的数学模型及其应用"一书. 目前主要从事长期统计预报等方面的研究.